

# ACTA DE RESUMENES

LXXXIII Encuentro Anual  
Sociedad de Matemática de Chile

Conferencias  
y  
Sesiones Invitadas

Sociedad de Matemática de Chile

# INTRODUCCIÓN

El Encuentro de la SOMACHI es un evento de carácter nacional que se realiza anualmente y que tiene como uno de sus objetivos reunir por un par de días a los académicos, profesores e investigadores de la disciplina para que intercambien sus conocimientos y experiencias. Además en este encuentro la comunidad matemática chilena elige directiva y planifica iniciativas futuras.

Este año se ha estimado conveniente mostrar a la comunidad el trabajo científico de los matemáticos galardonados este año 2014 con las medallas Fields, entregadas durante el International Congress of Mathematicians (ICM-2014) que tuvo lugar en la ciudad de Seul, Corea del Sur. Para ello se han programado una serie de Conferencias Plenarias dictadas por expertos en las áreas y que esperamos sean de provecho para el desarrollo de nuestra matemática.

La SOMACHI se ha preocupado fuertemente en fomentar la participación de estudiantes de pre y pos grado en las distintas sesiones de trabajo, y que esperamos que sea una experiencia provechosa para los alumnos que han comenzado su formación matemática.

El Comité Organizador agradece el valioso aporte de los organizadores y coordinadores de sesión, sin cuya colaboración este encuentro no habría sido posible. En estas actas se plasma un resumen de los trabajos que se presentaron.

Comité Organizador  
LXXXIII Encuentro  
Sociedad de Matemática de Chile

**Comité científico:**

CARLOS CONCA (UNIVERSIDAD DE CHILE)  
VÍCTOR GONZÁLEZ (UNIVERSIDAD SANTA MARÍA)  
SEBASTIÁN LORCA (UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ)  
ANDRÉS NAVAS (UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE)  
RUBÍ RODRÍGUEZ (UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA)  
SERGEI TROFIMCHUK (UNIVERSIDAD DE TALCA)

**Comité organizador:**

VÍCTOR CORTÉS (PUC)  
ANA CECILIA DE LA MAZA (UCM)  
MARIO PONCE (PUC)

**Sesiones de Invitadas:**

Álgebra y Teoría de Números, MANUEL ARENAS (UDECHILE)  
Biomatemática, EDUARDO GONZÁLEZ (PUCV)  
Divulgación y Didáctica de la Matemática, XIMENA COLIPÁN (UCM), ELIZABETH MONTROYA (PUCV)  
Ecuaciones Diferenciales Parciales, MARKO ROJAS (UBIOBIO)  
Física Matemática, ERDAL EMSIZ (PUC)  
Geometría, MAXIMILIANO LEYTON (UTALCA)  
Optimización, HÉCTOR RAMÍREZ (UDECHILE)  
Probabilidad y Estadística, KARINE BERTIN (UV)  
Problemas Inversos y Control de EDP, EDUARDO CERPA (UTFSM)  
Sistemas Dinámicos, PABLO AGUIRRE (UTFSM)  
Teoría de Matrices y Teoría Espectral de Grafos, MARIO SALAS, RICARDO SOTO (UCN)

Sociedad de Matemática de Chile,  
[www.somachi.cl](http://www.somachi.cl)  
Canadá 253 Departamento F  
Providencia, Santiago de Chile.

# Contents

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>2</b>
<b>CONFERENCIAS PLENARIAS</b>	<b>13</b>
<b>Un vistazo a los trabajos de Artur Avila</b>	<b>14</b>
<i>Jairo Bochi</i>	
<b>Maryam Mirzakhani: un viaje superficial</b>	<b>15</b>
<i>Rubén A. Hidalgo</i>	
<b>Las Estructuras de Regularidad de Martin Hairer</b>	<b>16</b>
<i>Milton Jara</i>	
<b>Distorsión en grupos de difeomorfismos y aplicaciones</b>	<b>17</b>
<i>Andrés Navas</i>	
<b>SESIONES INVITADAS</b>	<b>18</b>
<b>Álgebra y Teoría de Números . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>On faithful representations of 2-step nilradicals of type A</b>	<b>20</b>
<i>María Alejandra Alvarez, Nadina Rojas</i>	
<b>Calculando idempotentes en <math>\mathbb{Q}[G]</math> para <math>G</math> un grupo nilpotente</b>	<b>21</b>
<i>Antonio Behn</i>	
<b>Fourier coefficients of automorphic functions</b>	<b>23</b>
<i>Karam Deo Shankhadhar</i>	
<b>Raíces cúbicas de la unidad en órdenes positivos definidos</b>	<b>25</b>
<i>Luis Arenas-Carmona</i>	
<b>Sobre la Conjetura de Monotonidad de los polinomios de Kazhdan y Lusztig</b>	<b>26</b>
<i>David Plaza</i>	
<b>Optimal bounds for Büchi's problem in modular arithmetic</b>	<b>28</b>
<i>Pablo Sáez, Xavier Vidaux, Maxim Vsemirnov</i>	
<b>Biomatemática . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>A general class of predation models with multiplicative Allee effect</b>	<b>30</b>
<i>Pablo Aguirre</i>	
<b>Dinámica de Transiciones en interacciones poblacionlles</b>	<b>32</b>
<i>Carlos R. Bageta y Marcelo E. Alberto</i>	

<b>Dinámicas en el modelo de depredación de Holling-Tanner considerando interferencia entre los depredadores</b>	<b>34</b>
<i>Adrián Ceconato C y Eduardo González Olivares</i>	
<b>A stochastic disease transmission in an epidemic model considering a hyperbolic incidence rate</b>	<b>36</b>
<i>A. Christen, M. A. Maulén-Yañez , E. González-Olivares and M. Curé</i>	
<b>Modelo diferencial de abundancia en parches de una población en proceso Fragmentación. Una mirada desde la migración interna.</b>	<b>37</b>
<i>Rodrigo Del Valle, Fernando Córdova-Lepe</i>	
<b>El rol del depredador en la coexistencia</b>	<b>39</b>
<i>M. Falconi</i>	
<b>Dinámica y coexistencia de especies en redes de interacción mutualista planta-polinizador</b>	<b>41</b>
<i>Franco-Cisterna, M., Moisset de Espanés, P., Ramos-Jiliberto, R.</i>	
<b>Estabilidad global en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower considerando interferencia entre los depredadores</b>	<b>43</b>
<i>Javiera Gallegos Zuñiga y Eduardo González Olivares</i>	
<b>Dynamics of a modified Holling-Tanner predator-prey model with ratio-dependent functional response</b>	<b>45</b>
<i>José D. Flores and Eduardo González-Olivares</i>	
<b>Numerical solution of a simple diffusion model of Ebola propagation by Finite Element Method</b>	<b>47</b>
<i>Roxana López Cruz</i>	
<b>Dos modelos impulsivos como discretizaciones del clásico modelo epidemiológico SIR</b>	<b>49</b>
<i>Rodrigo Gutiérrez-Aguilar, Fernando Córdova-Lepe.</i>	
<b>Distribución genotípica bajo mortalidad diferenciada por rasgos fenotípicos</b>	<b>51</b>
<i>Héctor Rojas-Castro, Fernando Córdova-Lepe</i>	
<b>Ciclos límites múltiples en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower considerando efecto Allee en las presas</b>	<b>53</b>
<i>Elizabeth Rozas Torres y Eduardo González Olivares</i>	
<b>Modelo matemático de control epidemiológico y sus efectos económicos</b>	<b>55</b>
<i>Ma. Eugenia Solis, Fernando Córdova-Lepe</i>	
<b>Efecto de la latencia en un sistema depredador presa</b>	<b>56</b>
<i>P. Urbani , P. Moisset de Espanes , R. Ramos-Jiliberto y L. Garay-Narváez</i>	

<b>Análisis de la Estructura Espacial de Biorreactores en un proceso de descontaminación mediante Digestión Anaerobia</b>	<b>58</b>
<i>Diego Vicencio Morales</i>	
<b>Divulgación y Didáctica de la Matemática . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>La Educación Estadística como Campo de Investigación. Significado y Comprensión de los Conceptos Estadísticos</b>	<b>61</b>
<i>Hugo Alvarado Martínez</i>	
<b>Propuesta de aprendizaje sobre funciones exponencial y logaritmo</b>	<b>63</b>
<i>Valentina Chaparro Aguilera, Belén Luke Farías</i>	
<b>Pensamiento Proporcional en la Escuela: Es efectiva su Enseñanza?</b>	<b>65</b>
<i>Lino Cubillos Silva</i>	
<b>Identidad Profesional de Estudiantes de Pedagogía en Educación Matemática en un Contexto de Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra Escolar</b>	<b>68</b>
<i>Rodrigo Panes Ch., Miguel Friz C., Susan Sanhueza H.</i>	
<b>Relación entre el Medio y el Contrato Didáctico</b>	<b>71</b>
<i>Ismenia Guzmán R.</i>	
<b>Literacidad y Discurso Matemático para el Aprendizaje Escolar: un estudio en alumnos en formación Inicial docente</b>	<b>72</b>
<i>Ana Carolina Maldonado Fuentes, Francisco Rodríguez Alveal, Pedro Sandoval Rubilar</i>	
<b>Cambio Del Profesor y Resolución De Problemas De Final Abierto</b>	<b>74</b>
<i>María Victoria Martínez Videla</i>	
<b>Una columna de opinión matemática</b>	<b>77</b>
<i>Andrés Navas</i>	
<b>Implementing a Teaching Engineering from concept Limit your Epistemology Topological a Freshman Engineering in Chile UCSC</b>	<b>78</b>
<i>Eduardo Orellana R.</i>	
<b>Un modelo para caracterizar y desarrollar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores</b>	<b>80</b>
<i>Luis R. Pino-Fan</i>	
<b>Ciudadanía Crítica y Aprendizaje de la Matemática. Una mirada desde las nociones construídas por los estudiantes de Enseñanza Media</b>	<b>82</b>
<i>Victor Parra G, Rodrigo Panes Ch</i>	
<b>Construcciones Mentales para el uso de conceptos básicos del Álgebra Lineal</b>	<b>84</b>
<i>Marcela Parraguez González, Raúl Jiménez Alarcón</i>	

<b>Creencias acerca de la matemática y su aprendizaje en estudiantes de 2º básico</b>	<b>86</b>
<i>Josefa Perdomo-Díaz</i>	
<b>Tratamiento de la contingencia en el aula de matemáticas</b>	<b>88</b>
<i>Horacio Solar</i>	
<b>Lenguaje y Léxico Matemático</b>	<b>90</b>
<i>María del Valle L. y Pedro Salcedo L.</i>	
<b>Alfabetización Numérica: Habilidad para decodificar problemas asociados a medidas de tendencia central en estudiantes en formación inicial docente</b>	<b>92</b>
<i>Francisco Rodríguez Alveal, Pedro Sandoval Rubilar, Ana Carolina Maldonado Fuentes</i>	
<b>Alfabetización Estadística: Habilidades para codificar y decodificar representaciones gráficas de profesores en ejercicio y formación inicial docente</b>	<b>94</b>
<i>Pedro Sandoval Rubilar, Francisco Rodríguez Alveal, Ana Carolina Maldonado Fuentes</i>	
<b>Ecuaciones Diferenciales Parciales . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>On a nonlinear thermoelastic system with variable coefficients</b>	<b>97</b>
<i>H. R. Clark and R. R. Guardia</i>	
<b>A uniqueness result for an inverse problem arising in a mass diffusion problem</b>	<b>100</b>
<i>A. Coronel y M.A. Rojas-Medar</i>	
<b>Analytical construction of the solution of the Riemann Problem for Burgers equation with discontinuous source</b>	<b>102</b>
<i>A. Coronel , M.A. Rojas-Medar , M. Sepúlveda and A. Tello</i>	
<b>An inhomogeneous nonlocal diffusion problem with unbounded steps</b>	<b>104</b>
<i>Manuel Elgueta</i>	
<b>Existencia de soluciones para problemas elípticos ligeramente supercríticos</b>	<b>105</b>
<i>Jorge García-Melián, Leonelo Iturriaga, Humberto Ramos Quoirin</i>	
<b>Multiplicidad de soluciones para ciertos problemas elípticos semilineales que involucran no linealidades con ceros</b>	<b>106</b>
<i>Jorge García-Melián, Leonelo Iturriaga</i>	
<b>Un problema elíptico semi lineal con singularidad</b>	<b>108</b>
<i>Sebastián Lorca</i>	
<b>Power law non newtonian convective alloy solidification in thick walled mold with DBF model and PSIMPLER algorithm</b>	<b>109</b>
<i>Nelson O. Moraga and Sebastián U. Ángel</i>	

<b>Comportamiento Asintótico para un sistema de ecuaciones de fluido Micropolar</b>	<b>111</b>
<i>M. Poblete-Cantellano, P. Marín-Rubio y M. A. Rojas-Medar</i>	
<b>Second grade fluid system: a control problem</b>	<b>113</b>
<i>Fagner D. Araruna, Luis Friz and Marko A. Rojas-Medar</i>	
<b>Large Solutions for a Class of Semilinear Integro-Differential Equations with Censored Jumps</b>	<b>115</b>
<i>Erwin Topp, Julio Rossi</i>	
<b>Modelling conjugate heat and mass transfer food thawing and mixed convection in air</b>	<b>117</b>
<i>Carlos E. Zambra, Leopoldo A. Jauriat and Nelson O. Moraga</i>	
<b>Física Matemática . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>Unitary Laurent Operators and GGT Matrices with constant Verblunsky coefficients</b>	<b>120</b>
<i>M.A. Astaburuaga, O. Bourget, V.H. Cortés</i>	
<b>Energía del estado fundamental de un sistema de polarones</b>	<b>121</b>
<i>R. D. Benguria</i>	
<b>Generación de álgebras graduadas vía complejos de gauge y ecuaciones diferenciales de tipo pseudo-esférico</b>	<b>122</b>
<i>Samin Ingrith Cerón Bravo</i>	
<b>Commutator relations for classical Toeplitz operators</b>	<b>124</b>
<i>M.A. Astaburuaga, O. Bourget, V.H. Cortés</i>	
<b>Efecto de cut-off en la velocidad de propagación de frentes en la ecuación de reacción-difusión</b>	<b>126</b>
<i>R. D. Benguria, <u>M. C. Depassier</u></i>	
<b>Descripción asintótica local del espectro de perturbaciones métricas del Hamiltoniano de Landau</b>	<b>128</b>
<i><u>Tomás Lungenstrassy</u> <u>Georgi Raikov</u></i>	
<b>Estimaciones de Mourre para operadores de Schrödinger cristales topológicos</b>	<b>129</b>
<i>Daniel Parra</i>	
<b>Caida libre en Relatividad General</b>	<b>130</b>
<i>Enrique Reyes García</i>	
<b>Ballistic dynamics of Dirac particles in electro-magnetic fields</b>	<b>131</b>
<i>Josef Mehringer, <u>Edgardo Stockmeyer</u></i>	



<b>Commutator criteria for strong mixing</b>	<b>132</b>
<i>Rafael Tiedra de Aldecoa</i>	
<b>Geometría</b> . . . . .	133
<b>Hypersurfaces achieving the Homma-Kim bound</b>	<b>134</b>
<i>Andrea Luigi Tironi</i>	
<b>About the semiample cone of the symmetric product of a curve</b>	<b>135</b>
<i>Antonio Laface</i>	
<b>Identities on hyperbolic surfaces</b>	<b>136</b>
<i>Ara Basmajian</i>	
<b>Foliations on Lie groupoids and homotopy representations</b>	<b>137</b>
<i>Cristián Ortiz</i>	
<b>The Craighero–Gattazzo surface is simply-connected</b>	<b>138</b>
<i>Julie Rana, Jenia Tevelev, Giancarlo Urzúa</i>	
<b>The fundamental group of a <math>\mathbb{T}</math>-variety</b>	<b>140</b>
<i>Antonio Laface, Alvaro Liendo, Joaquín Moraga</i>	
<b><math>\mathbb{Z}_p^n</math> actuando en Superficies de Riemann.</b>	<b>141</b>
<i>Mariela Carvacho, Anthony Weaver</i>	
<b>Calabi-Yau hypersurfaces of Fano toric varieties</b>	<b>142</b>
<i>Michela Artebani</i>	
<b>A generalization of the Recillas construction</b>	<b>143</b>
<i>Rubí E. Rodríguez and Angel Carocca</i>	
<b>Non commutative K3 surfaces and moduli spaces of sheaves</b>	<b>144</b>
<i>Sukhendu Mehrotra</i>	
<b>Optimización</b> . . . . .	145
<b>Non-Convex Second Order State Dependent Sweeping Processes in Hilbert Space</b>	<b>146</b>
<i>Ba Khiat Le, Samir Adly</i>	
<b>The ROF model in <math>H^1</math> and algorithms for the numerical resolution</b>	<b>147</b>
<i>Cesare Molinari</i>	
<b>Variational analysis in the light of semi-algebraic geometry</b>	<b>148</b>
<i>Aris Daniilidis</i>	
<b>Second order asymptotic analysis, basic theory and applications</b>	<b>149</b>
<i>Flores-Bazán, F., Hadjisavvas, N., Lara, F.</i>	

<b>Optimizacion multi-criterio: algunas dinamicas continuas y algoritmos</b>	<b>150</b>
<i>H. Attouch, G. Garrigos, X. Goudou</i>	
<b>Characterizations of the subdifferential of convex integrals</b>	<b>151</b>
<i>Abderrahim Hantoute</i>	
<b>On the graphical derivative of solution maps to parameterized equilibria with conic constraints</b>	<b>152</b>
<i>Héctor Ramírez</i>	
<b>Strong convergent Tseng’s algorithm for solving monotone inclusions</b>	<b>153</b>
<i>Luis M. Briceño Arias, P. L. Combettes</i>	
<b>Optimal rates of convergence for averaged fixed-point iterations</b>	<b>154</b>
<i>Mario Bravo, Roberto Cominetti</i>	
<b>Multi-class Support Vector Machines with configuration center</b>	<b>155</b>
<i>Miguel Carrasco, Julio López and Sebastián Maldonado</i>	
<b>On Hadamard well-posedness of families of multiobjective optimization problems</b>	<b>156</b>
<i>César Gutiérrez<sup>1</sup>, Rubén López<sup>2</sup>, Vicente Novo<sup>3</sup></i>	
<b>Real algebraic geometry and Hamiltonian dynamics</b>	<b>157</b>
<i>Laurent Niederman</i>	
<b>Probabilidad y Estadística . . . . .</b>	<b>158</b>
<b>Slope heuristics in heteroscedastic least-squares regression</b>	<b>159</b>
<i>Adrien Saumard</i>	
<b>Specification tests for instrumental variables models in the presence of heteroskedasticity and many instruments</b>	<b>161</b>
<i>Federico Crudu, Giovanni Mellace, Zsolt Sándor</i>	
<b>Una aproximación a la mezcla jerárquica de krigings</b>	<b>162</b>
<i>Freddy Omar López Quintero</i>	
<b>Collapse transition of a self-interacting partially directed random walk</b>	<b>163</b>
<i>Gia Bao Nguyen</i>	
<b>Modelo ARCH y proceso de Poisson fraccionario</b>	<b>164</b>
<i>Héctor Araya<sup>1</sup>, Natalia Bahamonde<sup>2</sup>, Soledad Torres<sup>3</sup></i>	
<b>Stochastic control of branching diffusions : a finite horizon problem</b>	<b>165</b>
<i>Julien Claisse</i>	
<b>Absorbing State Phase Transitions</b>	<b>166</b>
<i>Manuel Cabezas</i>	

<b>On Subsampling, Algebraic Confidence Covers and Asymptotics</b>	<b>167</b>
<i>Milan Stehlík</i>	
<b>Aproximación de campos aleatorios en alta dimensión</b>	<b>168</b>
<i>Nora Serdyukova</i>	
<b>Propagación de caos para la ecuación de Boltzmann</b>	<b>169</b>
<i>Roberto Cortez, Joaquín Fontbona</i>	
<b>Geometric Ergodicity of Gibbs Sampler for Bayesian General <math>t</math> Linear Mixed Models</b>	<b>170</b>
<i>Rolando de la Cruz<sup>*,¶</sup>, Nathalie Humeniy<sup>*</sup>, Jorge Carlos Román<sup>**</sup></i>	
<b>Problemas Inversos y Control de EDP</b>	<b>171</b>
<b>Null controllability of a cascade system of Schrödinger equations.</b>	<b>172</b>
<i>Alberto Mercado Saucedo</i>	
<b>Stability in transmission problems to Timoshenko beams with localized Kelvin-Voigt dissipation</b>	<b>173</b>
<i>J., Muñoz-Rivera<sup>†</sup>, O., Vera<sup>‡</sup>, A., Rambaud<sup>‡</sup></i>	
<b>Almost automorphy and Riccati Equation</b>	<b>175</b>
<i>Indira Mishra</i>	
<b>Aproximación numérica de los controles exactos en la ecuación del calor 2D</b>	<b>177</b>
<i>Galina García<sup>A</sup>, Javier Ramírez<sup>B</sup></i>	
<b>Equilibrio de Nash para control multiobjetivo de un modelo de solidificación</b>	<b>178</b>
<i>F.P. Marques-Lopes, M.A. Rojas-Medar</i>	
<b>Image reconstruction using scattering in SPECT.</b>	<b>180</b>
<i>Courdurier M.<sup>†</sup>, Monard F., Osses A., Romero F.</i>	
<b>Insensitizing controls with vanishing components for the Boussinesq system</b>	<b>181</b>
<i>Nicolás Carreño</i>	
<b>On the control of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation</b>	<b>183</b>
<i>Eduardo Cerpa, Patricio Guzmán and Alberto Mercado</i>	
<b>Sistemas Dinámicos</b>	<b>184</b>
<b>Minimal field of definition of a rational dynamic</b>	<b>185</b>
<i>Rubén A. Hidalgo</i>	
<b>Fractal and extreme aspects of random dynamical systems</b>	<b>187</b>
<i>Milan Stehlík</i>	

<b>Exponentes de Lyapunov para familias de cociclos lineales rotados</b>	<b>188</b>
<i>Francisco Valenzuela H. and Carlos H. Vásquez</i>	
<b>Kan’s phenomena is not usual in three dimensional partially hyperbolic diffeomorphisms</b>	<b>189</b>
<i>Raúl Ures and Carlos H. Vásquez</i>	
<b>Prevalence of Ergodic optimization on shift spaces</b>	<b>191</b>
<i>Jairo Bochi and Yiwei Zhang</i>	
<b>Teoría de Matrices y Teoría Espectral de Grafos . . . . .</b>	<b>192</b>
<b>Nonnegative Bisymmetric Matrices with prescribed spectrum</b>	<b>193</b>
<i>Ana I. Julio, Ricardo Soto</i>	
<b>Polar Matrix of a Graph</b>	<b>194</b>
<i>Eduardo Montenegro V., Eduardo Cabrera A.</i>	
<b>Una familia de matrices no negativas con espectro y divisores elementales prescritos</b>	<b>196</b>
<i>Elvis R. Valero Kari, Ricardo L. Soto</i>	
<b>Relation between the energy of the line graph of <math>G</math> and the signless Laplacian energy of <math>G</math>.</b>	<b>197</b>
<i>Luis Medina C.</i>	
<b>An application of <math>M</math>-matrices</b>	<b>198</b>
<i>Mario Salas García</i>	
<b>Effect on the Laplacian Estrada Index by adding edges on pendent vertices</b>	<b>199</b>
<i>Oscar Rojo</i>	
<b>Nonnegative persymmetric matrices with prescribed elementary divisors</b>	<b>201</b>
<i>Ricardo Soto Montero</i>	
<b>Nonnegative inverse elementary divisors problem in the left half plane</b>	<b>202</b>
<i>Roberto C. Díaz M. , Ricardo L. Soto M.</i>	
<b>A lower bound for the spectral radius and upper bound energy of starlike trees</b>	<b>203</b>
<i>Rubí Arrizaga Zercovich</i>	

# CONFERENCIAS PLENARIAS

# Un vistazo a los trabajos de Artur Avila

*Jairo Bochi*

En esta charla explicaré algunos de los teoremas más impactantes de Artur Avila, sin suponer previos conocimientos de Sistemas Dinámicos.

# Maryam Mirzakhani: un viaje superficial

*Rubén A. Hidalgo*

En Agosto 2014, Maryam Mirzakhani ha sido galardonada con la “*Medalla Field*”. Su trabajo se concentra en el área de las superficies de Riemann y objetos relacionados (espacios de Teichmüller, espacios de moduli, geodesicas, etc.). En esta charla intentaré, de la manera más simple posible, mostrar a estudiantes de matemática y no-expertos, algunos de los temas sobre los cuales Maryam ha trabajado. En las referencias se mencionan algunas de las publicaciones de Maryam y colaboradores en las cuales se pueden leer los detalles de sus trabajos.

## References

- [1] A. Eskin, M. Mirzakhani and A. Mohammadi. Isolation, equidistribution and orbits closures for the  $SL_2(\mathbb{R})$  action on moduli space. Preprint, 2014.
- [2] A. Eskin and M. Mirzakhani. Invariant and stationary measures for the  $SL_2(\mathbb{R})$  action on moduli space. Preprint, 2014.
- [3] M. Mirzakhani. Growth of Weil-Petersson volumes and random hyperbolic surfaces of large genus. *J. Differential Geom.* **94** (2013), 267–300.
- [4] M. Mirzakhani. Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces. *Annals of Math.* **168** (2008), 97–125.
- [5] M. Mirzakhani. Ergodic theory of the earthquake flow. *Int. Math. Res. Not.* (2008).
- [6] M. Mirzakhani. Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces. *Inv. Math.* **167** (2007), 179–222.
- [7] M. Mirzakhani. Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli spaces of curves. *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), 1–23.
- [8] M. Mirzakhani and P. Zograf. Towards large genus asymptotics of intersection numbers on moduli spaces of curves. Preprint, 2012.

# Las Estructuras de Regularidad de Martin Hairer

*Milton Jara*

En agosto de este año, Martin Hairer fue galardonado con la prestigiosa Medalla Fields, por su teoría de estructuras de regularidad, que le permitió probar la existencia y unicidad de soluciones varias ecuaciones importantes de la física matemática, como son la ecuación KPZ, el modelo de Anderson parabólico y el modelo  $\Phi_3^4$ . Para explicar las dificultades y el alcance de la teoría, nos fijaremos en una ecuación en particular, la ecuación KPZ, que fue también cronológicamente la primera ecuación resuelta con la teoría de estructuras de regularidad. La ecuación KPZ es la ecuación diferencial parcial en dimensión  $d = 1$  dada por

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + (\partial_x u)^2 + \dot{W},$$

donde  $\dot{W}$  es un ruido blanco espacio-temporal. Esta ecuación aparece en física teórica al intentar modelar la evolución temporal de interfaces de crecimiento en presencia de asimetrías, así como en varios otros procesos físicos unidimensionales. Del punto de vista matemático, esta ecuación no puede estar bien puesta en un sentido clásico, puesto que al menos formalmente, el movimiento Browniano es la única solución estacionaria atractora de esta ecuación. En particular, las soluciones de la ecuación KPZ deben tener la regularidad del movimiento Browniano, esto es,  $C^{1/2-}$ , por lo que para formular la ecuación de manera clásica habría que calcular el cuadrado de una distribución. En esta charla veremos cuál es la estructura de regularidad que permite obtener existencia y unicidad de las soluciones de esta ecuación, y explicaremos qué propiedades de esta ecuación permiten usar estructuras de regularidad.



# Distorsión en grupos de difeomorfismos y aplicaciones

*Andrés Navas*

Un elemento de orden infinito en un grupo finitamente generado es distorsionado si la longitud de sus potencias crece de manera sublineal. En esta charla explicaré el uso de este concepto en un contexto dinámico. Comenzaré con un teorema de A. Avila, el cual señala que toda rotación irracional del círculo es distorsionada dentro del grupo de los difeomorfismos infinitamente diferenciales. Tras revisar la extensión de E. Militon a dimensiones superiores, me concentraré en una aplicación notable de esto, debida a S. Hurtado: la existencia de un homomorfismo no trivial del grupo de los difeomorfismos de una variedad  $M$  en el de los difeomorfismos de una variedad  $N$  implica (entre otras cosas) que la dimensión de  $M$  debe ser mayor o igual a la de  $N$ .

# SESIONES INVITADAS

# Álgebra y Teoría de Números

# On faithful representations of 2-step nilradicals of type $A$

*María Alejandra Alvarez, Nadina Rojas*

## Abstract

Given a Lie algebra  $\mathfrak{g}$  over a field of characteristic zero, an integer invariant of  $\mathfrak{g}$  is  $\mu(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \pi : \pi \text{ is a faithful representation of } \mathfrak{g}\}$ . Its computation is acknowledged to be a hard task. In this work we consider a family of 2-step nilradicals of parabolic subalgebras of type  $A$ , and obtain families of faithful nilrepresentations. This gives us bounds for the invariant  $\mu$  and in some cases we prove that these representations are of minimal dimension.

## References

- [1] M.A. Alvarez, N. Rojas *On Faithful representations of 2-step nilradicals of type A*, Preprint.
- [2] D. Burde, W. Moens. *Minimal Faithful Representations of Reductive Lie Algebras*, Archiv der Mathematik., **Vol** (89), No. 6, (2007), 513–523.
- [3] L. Cagliero, N. Rojas. *Faithful representation of minimal dimension of current Heisenberg Lie algebras*, Int. J. Math. **Vol** (20) (11), (2009), 1347–1362.
- [4] L. Cagliero, N. Rojas. *A lower bound for faithful representations of nilpotent Lie algebras*, To appear in Linear and Multilinear Algebra.
- [5] W. de Graaf, W. Nickel. *Constructing faithful representations of finitely-generated torsion-free nilpotent groups*, J. Symbolic Comput., **Vol** (33)(1), (2002), 31–41.
- [6] N. Jacobson. *Lie Algebras*, Interscience Publishers, New York (1962).
- [7] W. Nickel. *Matrix representations for torsion-free nilpotent groups by Deep Thought*, J. of Algebra, **Vol** (300),(2006), 376–383.
- [8] I. Schur. *Zur Theorie vertauschbarer Matrizen*, J. Reine Angew. Mathemat., **Vol** (130) (1905), 66–76.

# Calculando idempotentes en $\mathbb{Q}[G]$ para $G$ un grupo nilpotente

*Antonio Behn*

## Abstract

Dado un grupo finito  $G$  se define el álgebra de grupo racional  $\mathbb{Q}[G]$  que por el teorema de Maschke es un álgebra semisimple. Los ideales simple de la descomposición del álgebra están en correspondencia con los elementos idempotentes.

El método clásico para calcular los idempotentes primitivos centrales consiste en primero calcular los idempotentes primitivos centrales  $e(\chi)$  en el álgebra de grupo compleja  $\mathbb{C}[G]$  mediante la fórmula

$$e(\chi) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}g)$$

para luego sumar los de la forma  $e(\sigma \circ \chi)$  con  $\sigma \in \text{Gal}(F(\chi)/F)$ . Este método requiere conocer entre otras cosas la tabla de caracteres del grupo.

Recientemente otros métodos han sido desarrollados, basados en subgrupos especiales de  $G$  llamados pares Shoda. Para ello, dado un subgrupo  $H$  de  $G$ , se define  $\widehat{H} = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$  y si  $K \triangleleft H \leq G$ ,

$$\epsilon(H, K) = \prod_{M/K \in \mathcal{M}(H/K)} (\widehat{K} - \widehat{M})$$

donde  $\mathcal{M}(H/K)$  denota el conjunto de subgrupos normales minimales de  $H/K$ . Claramente  $\epsilon(H, K)$  es un idempotente de  $\mathbb{Q}[G]$ .

Para grupos monomiales se ha podido dar una descripción de los idempotentes centrales sin usar los caracteres del grupo.

Finalmente para grupos nilpotentes es posible descomponer las álgebras simples para obtener los idempotentes primitivos (no centrales).

Con Gabriel Muñoz, como parte de su tesis de magister, implementamos estos métodos en la plataforma computacional SAGE.

---

Universidad de Chile, abehn@u.uchile.cl.

El trabajo es parcialmente financiado por el Proyecto Fondecyt 1140507

## References

- [1] Eric Jespers, Guilherme Leal, and Antonio Paques. Central idempotents in the rational group algebra of a finite nilpotent group. *J. Algebra Appl.*, 2(1):57–62, 2003.
- [2] Eric Jespers, Gabriela Olteanu, and Ángel del Río. Rational group algebras of finite groups: from idempotents to units of integral group rings. *Algebr. Represent. Theory*, 15(2):359–377, 2012.
- [3] Aurora Olivieri, Ángel del Río, and Juan Jacobo Simón. On monomial characters and central idempotents of rational group algebras. *Comm. Algebra*, 32(4):1531–1550, 2004.

# Fourier coefficients of automorphic functions

*Karam Deo Shankhadhar*

## Abstract

In this talk, we discuss asymptotic formulas for the coefficients of certain classes of weakly holomorphic Jacobi forms and weakly holomorphic modular forms (not necessarily integral weight).

Automorphic forms are very important objects in mathematics and two classical examples of automorphic forms are modular forms and Jacobi forms. The Fourier coefficients of any automorphic form characterize it, therefore they have been studied from various points of view and in particular, the growth of the Fourier coefficients is an important point to investigate. We consider more general objects, that is, automorphic functions which satisfy similar kind of transformation properties as automorphic forms except that they can have poles at the cusps. Weakly holomorphic Jacobi forms and weakly holomorphic modular forms are classical examples of automorphic functions.

Let us give a brief introduction of the topic of the talk. Let  $\mathcal{H}$  denote the complex upper half-plane. Let  $k$  be an even integer and  $M_k$  be the space of modular forms of weight  $k$  on  $SL_2(\mathbb{Z})$ . The Eisenstein series of weight  $k \geq 4$  for  $SL_2(\mathbb{Z})$  is defined by

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

where  $q = e^{2\pi i \tau}$  with  $\tau \in \mathcal{H}$ ,  $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$  and  $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$ . It is well known that  $E_k \in M_k$  for all  $k \geq 4$ . The Ramanujan delta function is given by

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

The function  $\Delta \in M_{12}$  is the unique normalized cusp form of the smallest weight for  $SL_2(\mathbb{Z})$ . For any integer  $k \in 2\mathbb{Z}$ , a weakly holomorphic modular form of weight  $k$  on  $SL_2(\mathbb{Z})$  is a meromorphic modular form whose poles (if any) are at  $i\infty$ . The function

$$j(\tau) = \frac{E_4^3(\tau)}{\Delta(\tau)} = q^{-1} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n) q^n$$

---

Depto. Matemáticas, Facultad de Ciencias, Univ. de Chile, Las Palmeras 3425, Nunoa, Santiago, Chile,  
karamdeo@u.uchile.cl, karamdeo@gmail.com

El trabajo es financiado por el Proyecto FONDECYT Postdoctorado No. 3140554.

is a fundamental weakly holomorphic modular form of weight 0. In 1918, the “circle method” was introduced in [2] by G. H. Hardy and S. Ramanujan to derive the well known asymptotic formula for the partition function  $p(n)$ :

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4\sqrt{3n}}, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Using the circle method, H. Petersson [3] and later H. Rademacher [4] independently derived the asymptotic formula for the coefficients  $c(n)$ :

$$c(n) \sim \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{3/4}}, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

In this talk, we define Jacobi forms, weak Jacobi forms and weakly holomorphic Jacobi forms following [1]. Then we discuss asymptotic formulas for the coefficients of certain class of weakly holomorphic Jacobi forms and weakly holomorphic modular forms (not necessarily integral weight). We give two interesting applications of our main theorem. The first of them is about the growth of the Fourier coefficients of the two weak Jacobi forms of index 1 and non-positive weight who generate the ring of weak Jacobi forms of even weight freely over the ring of modular forms on  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Secondly, we give an asymptotic formula for the coefficients of the functions  $\theta^k/\eta^l$ ,  $k, l \geq 1$ ; where  $\theta$  is the weight  $1/2$  modular form and  $\eta$  is the Dedekind eta function. This is a joint work with J. Meher.

## References

- [1] M. Eichler and D. Zagier, *The theory of Jacobi forms*, Progr. Math. **55**, Birkhäuser, 1985.
- [2] G. H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. **17** (1918), 75–115.
- [3] H. Petersson, *Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen formen*, Acta Math. **58** (1932), 169–215.
- [4] H. Rademacher, *The Fourier coefficients of the modular invariant  $j(\tau)$* , Amer. J. Math. **60** (1938), 501–512.



# Raíces cúbicas de la unidad en órdenes positivos definidos

*Luis Arenas-Carmona*

## Abstract

Se estudiará el conjunto de órdenes maximales en un álgebra de cuaterniones que contienen raíces cúbicas de la unidad vía teoría de grafos.

La teoría de géneros espinoriales y cuerpos de clases espinoriales nos permitió estudiar cuando un orden conmutativo  $H$  es selectivo en un álgebra de cuaterniones cuyo completado no es isomorfo al álgebra de cuaterniones de Hamilton en cada lugar infinito, es decir,  $H$  se incrusta en algunos, pero no todos los órdenes maximales en el álgebra. En este *caso indefinido*, la selectividad parece ser un fenómeno particularmente inusual. Mediante el uso de grafos cocientes probaremos que esto no es así en el caso indefinido, es decir cuando completado del álgebra es isomorfo al álgebra de cuaterniones de Hamilton en infinito, al menos en algunos casos particulares.

## References

- [1] L. ARENAS-CARMONA, *Applications of spinor class fields: embeddings of orders and quaternionic lattices*, Ann. Inst. Fourier **53** (2003), 2021–2038.
- [2] L. ARENAS-CARMONA. *Representation fields for commutative orders*, Ann. Inst. Fourier **62** (2012), 807-819.
- [3] L. ARENAS-CARMONA, *Eichler orders, trees, and spinor genera* Int. J. Number Theory **9** (2013), 1725–1741.
- [4] L. ARENAS-CARMONA, *Roots of unity in definite quaternion orders* arXiv:1404.3244v1 [math.NT].

# Sobre la Conjetura de Monotonidad de los polinomios de Kazhdan y Lusztig

*David Plaza*

## Abstract

La celularidad graduada de las dobles hojas de Libedinsky, las cuales forman una base del álgebra de endomorfismos de un bimódulo de Bott-Samelson-Soergel, nos permite interpretar los polinomios de Kazhdan-Lusztig como números de descomposición graduados. Usando esta interpretación, podemos demostrar una conjetura sobre la monotonidad de los polinomios de Kazhdan-Lusztig para un grupo de Coxeter arbitrario.

En [4], Kazhdan y Lusztig definieron, para cada sistema de Coxeter  $(W, S)$  una familia de polinomios con coeficientes enteros indexados por pares de elementos de  $W$ . Esos polinomios son ahora conocidos como los polinomios de Kazhdan-Lusztig (KL), los cuales denotaremos por  $P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ , para todo  $x, w \in W$ . Aplicaciones de estos polinomios pueden ser encontradas en distintas áreas de las matemáticas tales como, la teoría de representaciones de grupos algebraicos semisimples, la topología de variedades de Schubert, la teoría de módulos de Verma, etc.

Además de la importancia de los KL-polinomios en las áreas antes mencionadas, hay razones puramente combinatoriales para estudiar estos polinomios. Probablemente, la principal razón es la antigua conjetura de positividad de Kazhdan y Lusztig, que afirma que  $P_{x,w}(q) \in \mathbb{N}[q]$ , para todo grupo de Coxeter y elementos  $x, w \in W$ . En 2013, Elias y Williamson [2] dieron una demostración de esta conjetura, demostrando un resultado más fuerte conocido como la conjetura de Soergel [7].

Mucho más que la positividad es concebible para los KL-polinomios. En efecto, Braden y MacPherson [1] probaron una propiedad de monotonía para los coeficientes de estos polinomios, cuando  $W$  es un grupo de Weyl finito o afín. Concretamente, si  $W$  es un grupo de Weyl finito o afín y  $u, v, w \in W$  son tales que  $u \leq v \leq w$ , entonces

$$P_{u,w}(q) - P_{v,w}(q) \in \mathbb{N}[q], \tag{1}$$

donde  $\leq$  denota el orden de Bruhat sobre  $W$ . En otras palabras, si fijamos el segundo índice de un KL-polinomio, mientras el primero decrece en el orden de Bruhat, todos los coeficientes del polinomio decrecen débilmente en valor. Es entonces natural conjeturar que (1) es cierta

---

Universidad de Chile, davidricardoplaza@gmail.com

El trabajo es financiado por el Proyecto Fondecyt Postdoctorado 3140612.

para grupos de Coxeter arbitrarios. En la literatura, esta última conjetura es conocida como la *Conjetura de Monotonidad* para los KL-polinomios. En esta charla presentaremos una demostración de esta conjetura.

Permítanos explicar brevemente la idea de la demostración. Para cada elemento  $w \in W$  y expresión reducida  $\underline{w}$  de  $w$ , uno puede definir explícitamente un  $(R, R)$ -bimódulo  $\mathbb{BS}(\underline{w})$  (donde  $R$  es cierto anillo de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{R}$ ) llamado el bimódulo de Bott-Samelson. El álgebra de endomorfismos de un bimódulo de Bott-Samelson,  $\text{End}(\mathbb{BS}(\underline{w}))$ , controla el comportamiento de los KL-polinomios. Más precisamente,  $\text{End}(\mathbb{BS}(\underline{w})) \otimes_R \mathbb{R}$  tiene estructura de álgebra celular graduada, en el sentido de Hu y Mathas [3], con base celular graduada la base de *Dobles Hojas* definida por Libedinsky en [5]. La existencia de una base celular graduada permite definir módulos celulares y simples graduados, como también números de descomposición graduados. En [6] demostramos que los números de descomposición graduados coinciden con los KL-polinomios, cuando estos últimos son convenientemente normalizados. Además, construimos ciertos homomorfismos inyectivos entre los módulos celulares. La inyectividad de estos homomorfismos nos permite obtener una propiedad de monotonía para los números de descomposición graduados, la cual es equivalente a la Conjetura de Monotonidad para los KL-polinomios.

## References

- [1] T. Braden, R. MacPherson, From moment graphs to intersection cohomology, *Math. Ann.* **321** (2001), 553-551.
- [2] B. Elias, G. Williamson. The Hodge theory of Soergel bimodules, *Math. Ann.* **180**(3), (2014), 1089-1136.
- [3] J. Hu, A. Mathas, Graded cellular bases for the cyclotomic Khovanov-Lauda-Rouquier algebras of type A, *Adv. Math.* **225** (2010), 598-642.
- [4] D. Kazhdan, G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, **53**(2) (1979), 165-184.
- [5] N. Libedinsky, Light leaves and Lusztig conjecture. Preprint. arXiv:1304.1448.
- [6] D. Plaza, Graded cellularity and the Monotonicity Conjecture, preprint arXiv:1410.2136 (2014).
- [7] W. Soergel, Kazhdan-Lusztig polynomials and indecomposable bimodules over polynomial rings, *Journal of the Inst. of Math. Jussieu* **6**(3), (2007), 501-525.

# Optimal bounds for Büchi's problem in modular arithmetic

*Pablo Sáez, Xavier Vidaux, Maxim Vsemirnov*

## Abstract

We study the second order analogue of the problem of finding optimal lower and upper bounds for the length of sequences of squares in arithmetic progression modulo a prime, and some connections with the computational problem of finding a quadratic non-residue modulo a prime. More precisely, we work modulo an integer and our objects of study are those sequences of squares whose second difference is an invertible constant. The main results of our work is a number of exact formulae that allow to reduce the problem to prime moduli. We also observe several phenomena which are supported by extensive numerical computations.

## References

- [1] H. Pasten, T. Pheidas, X. Vidaux, *A survey on Büchi's problem: new presentations and open problems*, Proceedings of the Hausdorff Institute of Mathematics, Zapiski POMI **377**, 111-140, Steklov Institute of Mathematics. Published online <http://www.pdmi.ras.ru/zns1/2010/v377.html> (2010).

---

Universidad de Concepción, St. Petersburg Department of V.A.Steklov Institute of Mathematics, and St. Petersburg State University, pablosaezphd@gmail.com.

The three authors have been partially supported by the Fondecyt research projects 1090233 and 1130134, Chile. Maxim Vsemirnov is partially supported by the Government of the Russian Federation (grant 14.Z50.31.0030), Russian Foundation for Basic Research (grant 12-01-00947-a) and the State Finance Task Project no. 6.38.191.2014 at St. Petersburg State University.

# Biomatemática

# A general class of predation models with multiplicative Allee effect

*Pablo Aguirre*

A class of models of predator-prey interaction with Allee effect on the prey population is presented. Both the Allee effect and the functional response are modelled in the most simple way by means of general terms whose conveniently chosen mathematical properties agree with, and generalise, a number of concrete Leslie-Gower type models; see also [2, 3].

We show that this class of models is well-posed in the sense that any realistic solution is bounded and remains nonnegative. By means of topological equivalences and desingularization techniques [4], we find specific conditions such that there may be extinction of both species. In particular, the local basin boundaries of the origin are found explicitly, which enables one to determine the extinction or survival of species for any given initial condition near this equilibrium point. Furthermore, we give conditions such that an equilibrium point corresponding to a positive steady state may undergo saddle-node, Hopf and Bogdanov-Takens bifurcations [4, 5]. As a consequence, we are able to describe the dynamics governed by the bifurcated limit cycles and homoclinic orbits by means of carefully sketched bifurcation diagrams and suitable illustrations of the relevant invariant manifolds involved in the overall organisation of the phase plane. Finally, these findings are applied to concrete model vector fields; in each case, the particular relevant functions that define the conditions for the associated bifurcations are calculated explicitly.

This work has been published in [1].

## References

- [1] P. Aguirre: *A general class of predation models with multiplicative Allee effect*, *Nonlinear Dynamics*, **78**, 629–648, 2014.
- [2] P. Aguirre, E. González-Olivares and E. Sáez: *Two limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **10**, 1401–1416, 2009.
- [3] P. Aguirre, E. González-Olivares and E. Sáez: *Three limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **69**, 1244–1262, 2009.

---

Universidad Técnica Federico Santa María, pablo.aguirre@usm.cl

Partially funded by FONDECYT Postdoctoral Grant N° 3130497, DGIP-UTFSM Grant 12.13.10 and Proyecto Basal CMM Universidad de Chile.

- [4] J. Guckenheimer and P. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [5] Yu. A. Kuznetsov: *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York/Berlin, 2004.

## Dinámica de Transiciones en interacciones poblacionlles

*Carlos R. Bageta y Marcelo E. Alberto*

Modelar matemáticamente la interacción de especies biológicas es de interés en diferentes áreas de aplicación, como la Ecología o la Agronomía. Dos especies pueden cambiar el tipo de interacción a lo largo del tiempo. Se modelarán dos tipos de sistemas: *Trichloris crinita* (Plumerillo)-*Vitis vinifera* (Vid), y *Pappophorum caespitosum*-*Vitis vinifera* (vid). Se formularán modelos matemáticos apropiados para los tipos de interacción estudiados y su transición. La oportuna aparición, hace algún tiempo, de modelos de transición en la interacción motivan el presente proyecto. Se buscan formas apropiadas para las funciones de reproducción y captura, como así también determinar condiciones de equilibrio para los sistemas propuestos y estudiar su estabilidad desde el punto de vista biomatemático. Conjuntamente a la modelación biomatemática se medirán, en la escala temporal apropiada y a campo, las variables de estado relacionadas con el crecimiento de las plantas (biomasa o cobertura) en los sistemas agronómicos propuestos, a fin de estimar estadísticamente los parámetros y las condiciones del cambio en la interacción de las especies. Con base en los datos y los modelos propuestos se desarrollarán métodos estadísticos adecuados.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x) + h_1(y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(y) + h_2(x, y) \end{cases}$$

Funciones de Reproduccion:

$$f_1(x), f_2(y)$$

funciones con autoinhibicion, cuya forma depende de la escala de tiempo considerada

Funciones de Captura:

$$h_1(y) = \chi_{[\tilde{y}, K_2]}(y) \varphi_1(y)$$

$$h_2(x, y) = \chi_{[\tilde{y}, K_2]}(y) \varphi_2(x) + \chi_{[0, \tilde{y}]}(y) \varphi_3(x, y)$$

siendo

$$\varphi_1(y) \text{ estrictamente decreciente, } \varphi_1(y) < 0 \forall y \neq \tilde{y}, \varphi_1(\tilde{y}) = 0$$

$$\varphi_2(x, y) < 0 \forall y \neq \tilde{y}, \varphi_2(x, \tilde{y}) = 0$$

$$\varphi_3(x, y) > 0 \forall y \neq \tilde{y}, \varphi_3(x, \tilde{y}) = 0$$



## References

- [1] M. J. Hernández: *Dynamics of transitions between population interactions: a nonlinear interaction alpha-function defined*, Proc. R. Soc. London, Vol. 265 no. 1404., 1433–1440, 1998.
- [2] M. Gillman, R. Hails: *An introduction to ecological modelling: putting practice into theory*, Oxford: Blackwell Scientific Publications, 1997.
- [3] R. M. May: *R. M. May. Models for two interacting populations in Theoretical ecology: principles and applications*, 2nd.ed. Sunderland-Sinauer, 1981.
- [4] J. F. Addicott: *Stability properties of 2-species models of mutualism: simulation studies*, Oecologia, 49, 42–49, 1981.
- [5] C. L. Wolin, L. R. Lawlor: *Models of facultative mutualism: density ejects*, Am. Nat., 124, 843–862, 1984.
- [6] A.J. Lotka: *Contribution to the Theory of Periodic Reaction*, J. Phys Chem., 14 (3), 271–274, 1910.
- [7] V. Volterra: *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Mem. Acad. Lincei. Roma, 2, 31–113, 1926.

# Dinámicas en el modelo de depredación de Holling-Tanner considerando interferencia entre los depredadores

*Adrián Ceconato C y Eduardo González Olivares*

En este trabajo se analiza un modelo depredador - presa, basado en el modelo de Holling-Tanner [7, 8], en el cual se asume que las funciones de crecimiento poblacional de ambas especies son del tipo logístico [7, 9]. La respuesta funcional de los depredadores es hiperbólica, un tipo particular de las respuestas funcionales del tipo Holling II [9]. Asimismo, el modelo contempla el supuesto de un depredador especialista [9], cuya capacidad de soporte es proporcional al tamaño poblacional de las presas [7].

La modificación al modelo original se halla expresada por la consideración de que existe interferencia entre los depredadores [5]. Es decir, los individuos de la especie depredadora compiten entre sí al realizar la captura de las presas, con lo cual obstaculizan mutuamente sus acciones.

El modelo mencionado es descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales autónomas del tipo Kolmogorov [4]:

$$X_\eta : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - \frac{q x}{x + a} y^p \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx}\right) y, \end{cases} \quad (\text{HT})$$

donde  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  indican los tamaños poblacionales de las presas y los depredadores respectivamente para  $t \geq 0$ , medidos como la cantidad de individuos, biomasa o densidad por unidad de área o volumen. Además  $\eta = (r, K, q, a, s, n, p) \in \mathbb{R}_+^6 \times ]0, 1[$  y los parámetros tienen distintos significados ecológicos [1].

En particular, la interferencia entre los depredadores se refleja por el parámetro  $p$  con  $0 < p < 1$ . Notamos que la función  $\psi(y) = y^p$  es no diferenciable para  $y = 0$ , lo que este hecho debería influir en la dinámica del modelo.

En el desarrollo realizado, a través del empleo de un sistema topológicamente equivalente al original [6], se ha demostrado el acotamiento de las soluciones, la existencia de una región de invarianza, determinando la naturaleza local de todos los puntos de equilibrio del sistema.

---

Instituto Superior del Profesorado San Pedro Nolasco, Universidad del Aconcagua, Mendoza, Argentina  
ajceconato@gmail.com

Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, ejgonzal@ucv.cl.

Este trabajo es parcialmente financiado por el Proyecto Fondecy 112 0218.

Además, se ha establecido la existencia de al menos un ciclo límite, via bifurcación de Hopf [3].

Los resultados obtenidos serán comparados con los resultados obtenidos en [2] y [8]

## References

- [1] C. Arancibia-Ibarra and E. González-Olivares, A modified Leslie-Gower predator-prey model with hyperbolic functional response and Allee effect on prey, In R. Mondaini (Ed.) *BIOMAT 2010 International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, World Scientific Co. Pte. Ltd., Singapore, 2011 146-162.
- [2] M. A. Aziz-Alaoui and M. Daher Okiye, Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes, *Applied Mathematics Letters*, 16 (2003) 1069-1075.
- [3] C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications* (2nd edition), Texts in Applied Mathematics 34, Springer 2006.
- [4] H. I. Freedman, *Deterministic Mathematical Model in Population Ecology*, Marcel Dekker, 1980.
- [5] H.I. Freedman, Stability analysis of a predator-prey system with mutual interference and density-dependent death rates, *Bulletin of Mathematical Biology* 41 (1979) 67-78.
- [6] E. González-Olivares, J. Mena-Lorca, A. Rojas-Palma and J. D. Flores, Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey, *Applied Mathematical Modelling* 35 (2011) 366-381.
- [7] R. M. May, *Stability and complexity in model ecosystems*, Princeton University Press 1974.
- [8] E. Sáez and E. González-Olivares, Dynamics on a predator-prey model. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 59 (1999) 1867-1878.
- [9] P. Turchin, *Complex population dynamics. A theoretical/empirical synthesis*, Monographs in Population Biology 35 Princeton University Press 2003.

# A stochastic disease transmission in an epidemic model considering a hyperbolic incidence rate

*A. Christen, M. A. Maulén-Yañez, E. González-Olivares and M. Curé*

A stochastic SI epidemic model is analysed, which is based on the model proposed by Roberts and Saha [1] and modified by Liu, Wu and Wang [2], considering a hyperbolic type nonlinear incidence rate. Assuming the proportion of population infected varies with time, a new model described by an ordinary differential equation is presented, which is analogous to an equation describing the double Allee effect. Then, the asymptotic behaviour of a stochastic fluctuation due to the environmental variation in the coefficient of disease transmission is studied. So, a stochastic differential equation is obtained, which is analysed. We study the existence and uniqueness of solution and the stationary behaviour. According to our knowledge this incidence rate has not been previously used for this type of epidemic models.

## References

- [1] M. G. Roberts and A. K. Saha: *The asymptotic behaviour of a logistic epidemic model with stochastic disease transmission*, Applied Mathematics Letters, 12, 37–41, 1999.
- [2] M. Liu, Q. Wu and K. Wang: *Analysis of an improved epidemic model with stochastic disease transmission*, Applied Mathematics and Computation, 218 9750–9758, 2012.

---

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, alejandra.christen@ucv.cl; mmaulen@ucv.cl; ejgonzal@ucv.cl

Universidad de Valparaíso, michel.cure@uv.cl

Este trabajo es financiado parcialmente por los Proyectos DI PUCV 126.711/201 y 124.730/2012

# Modelo diferencial de abundancia en parches de una población en proceso Fragmentación. Una mirada desde la migración interna.

*Rodrigo Del Valle, Fernando Córdova-Lepe*

Un proceso de fragmentación del hábitat de una población es modelado mediante un sistema diferencial (no autónomo) que cuantifica en cada instante la abundancia en los parches en formación. Dicho modelo postulado fue deducido ([10]) a partir de supuestos de perturbación en las tasas demográficas, estos se basaron en la influencia sobre las densidades locales alrededor de la frontera en formación de los parches, por fragmentación. Este modelo no daba cuenta del fenómeno de colonización. Por otro lado, la mayoría de los organismos se deben desplazar y este movimiento en el espacio se puede mirar como un proceso de *Migración interna*. La distribución y la densidad de población cambian en tiempo y espacio, i.e, la migración tiene el efecto de variar la distribución espacial de los individuos y, como resultado, los patrones localizados de la densidad de población. Así, parece natural incluir este movimiento interno, que al considerar fragmentación, lo podemos ver como migración interna por difusión simple. Consecuencias dinámicas sobre efecto de fragmentación, considerando este nuevo modelo, son estudiadas.

La pérdida de biodiversidad es uno de los principales problemas de salud planetaria. Situación constatable en los diferentes componentes y niveles de organización biológica, como también en toda escala temporal y/o espacial imaginable. Un factor de modificación importante son los procesos de fragmentación de hábitat en parches menores y que pueden arriesgar un aislamiento. La fragmentación tiene efectos concretos sobre la biota, pero los estudios (teóricos y/o empíricos) no han probado generalizaciones sobre sus consecuencias. Una causa es que en la realidad los efectos de una fragmentación co-ocurren con aquellos producidos por pérdida de hábitat. Es un tarea preliminar y de perspectiva teórica distinguir las consecuencias de estas situaciones, v.g., mediante modelos matemáticos que distingan estas causales. Cómo representar matemáticamente los procesos de fragmentación? y, de haber modelos, cómo estos dan cuenta de los efectos intermedios sobre las subpoblaciones?, son preguntas que orientan la investigación.

Considerando una situación final (tiempo  $t = t_f$ ) en que un hábitat ya está absolutamente dividido en fragmentos A y B, a partir de una inicial ( $t = t_i$ ) de plena conexión, es posible

deducir el siguiente modelo básico:

$$\begin{cases} x'_A(t) = rx_A(t) \left\{ 1 - \frac{x_A(t) + \eta(t)x_B(t)}{K_A + \eta(t)K_B} \right\} + \eta(t) \cdot m \left( \frac{x_B(t)}{K_B} - \frac{x_A(t)}{K_A} \right) \\ x'_B(t) = rx_B(t) \left\{ 1 - \frac{x_A(t)\eta(t) + x_B(t)}{K_A\eta(t) + K_B} \right\} + \eta(t) \cdot m \left( \frac{x_A(t)}{K_A} - \frac{x_B(t)}{K_B} \right) \end{cases}, \quad \begin{matrix} t_i < t < t_f, \\ \eta(t) \in (0, 1) \end{matrix}$$

donde  $x_A(t)$  y  $x_B(t)$  representan las abundancias de las subpoblaciones en formación, y  $\eta : [t_i, t_f] \rightarrow [0, 1]$  es una función decreciente que indica un grado de *resistencia ambiental desde el parche B hacia la subpoblación A, y viceversa*. Nótese como este sistema conecta, como proceso, la no fragmentación ( $\eta(t_i) = 1$ ) con el caso de un sistema absolutamente desacoplado ( $\eta(t_f) = 0$ ).

## References

- [1] A.A. Grez, J.A. Simonetti & R.O. Bustamante: *Biodiversidad en ambientes fragmentados de Chile: patrones y procesos a diferentes escalas*, Editorial Universitaria, 2006.
- [2] L. Fahrig: *Effects of habitat fragmentation on biodiversity*, Annual Review of Ecology, Evolutions and Systematics, 34, 487-515, 2003.
- [3] H. Freedman & P. Waltman: *Mathematical models of population interaction with dispersal. I: stability of two habitats with and without a predator*, SIAM J. Appl. Math., 32(3), 631-648, 1977.
- [4] R.T.T. Forman: *Land mosaic: The ecology of landscape and regions*, Cambridge University Press, 1995.
- [5] L.D. Harris: *The fragmented forest: island biogeography theory and the preservation of biotic diversity*, University of Chicago Press, 1984.
- [6] S. Hurrison & E. Bruna: *Habitat fragmentation and large scale conservation: what do we know for sure?*, Ecography, 22, 225-232, 1999.
- [7] K.W. Herbener, S.J. Tavener & N.T. Hobbs: *The distinct effects of habitat fragmentation on population size*, Theor. Ecol., 5, 73-82, 2012.
- [8] R.D. Holt: *Population dynamics in two-patch environments: some anomalous consequences of an optimal habitat distribution*, Theor. Popl. Biol., 28, 181-208, 1985.
- [9] N.F. Britton: *Essential Mathematical Biology*, Springer, 2003.
- [10] R. Del Valle & F. Córdova-Lepe: *A mathematical model of a single population with habitat fragmentation in progress*, Proceeding of CMMSE 2014, Vol II, 429-440, 2014.

## El rol del depredador en la coexistencia

*M. Falconi*

Entre las múltiples interacciones que se encuentran en una comunidad ecológica, sobresalen la depredación y la competencia interespecífica. Se considera que ambas contribuyen de manera importante en los procesos relacionados con la estructura de la red, ya que hacen posible la coexistencia de especies antagónicas. En la literatura sobre el tema se analizan diversos mecanismos que buscan explicar la forma en que estas interacciones hacen posible la coexistencia; por ejemplo, en [1] el depredador se alimenta de la especie más numerosa ("Switching effect"); en otros, el depredador captura al competidor dominante, (ver [2]). De modo general, los trabajos sobre este problema consideran modelos tipo Leslie y sus resultados, a grandes rasgos, muestran que la depredación puede ampliar las posibilidades para la coexistencia. En particular, competidores sin diferencia en el uso de recursos no podrían coexistir, sin embargo la presencia de un depredador con tasas de depredación que balanceen adecuadamente la presión competitiva permite la permanencia del sistema. En este trabajo, se analiza el problema de la coexistencia de competidores utilizando un modelo tipo Tanner de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx(1 - x/K) - d_1xy - \frac{a_1xz}{x^m + b_1}, \\ \dot{y} &= r_1y(1 - y/K_1) - d_2xy - \frac{a_2yz}{b_3y + b_2}, \\ \dot{z} &= z \left( 1 - \frac{z}{\alpha x + \beta y} \right).\end{aligned}\tag{1}$$

Las densidades de las presas se denotan con  $x$ ,  $y$ , la densidad del depredador es  $z$ . La especie  $x$  presentan un mecanismo de defensa si  $m > 1$ . Además de mostrar algunos avances del análisis del modelo (1), se demuestra la existencia de una bifurcación *Cero-Hopf* para el sistema plano correspondiente a un depredador generalista y una presa,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx(1 - x/K) - \frac{a_1xz}{x^m + b_1}, \\ \dot{z} &= z \left( 1 - \frac{z}{\alpha x + c} \right).\end{aligned}\tag{2}$$

El caso  $m = 2$  fue estudiado en [3]. Un interesante trabajo sobre la dinámica de este sistema para el caso  $m = 1$ ,  $c = 0$  es [4].

## References

- [1] J. Roughgarden, M. Feldman: *Species packing and predation pressure*, Ecology, 56, 489–492, 1975.
- [2] M.A. Leibold: *A graphical model of keystone predation in food webs: trophic regulation of abundance, incidence, and diversity patterns in communities*, Amer. Nat., 147, 784–812, 1996.
- [3] M. Falconi, E. González-Olivares, J. Llibre: *Zero-Hopf bifurcation in a predator-prey model*, Sc. Math Jap. 76(272), 119-128, (2013)
- [4] E. Sáez, E. González-Olivares: *Dynamics of a predator-prey model*, SIAM J. Appl. Math. 59, pp. 1867–1878, (1999)



## Dinámica y coexistencia de especies en redes de interacción mutualista planta-polinizador

*Franco-Cisterna, M., Moisset de Espanés, P., Ramos-Jiliberto, R.*

En este trabajo se expondrán nuevos avances en el estudio de un modelo de interacción planta-polinizador, el cual presenta dos novedades fundamentales respecto a modelos clásicos: La existencia de estados activos e inactivos dentro de cada especie y estacionalidad en la activación de los estados inactivos. Utilizando como objeto de estudio pequeñas redes de interacción planta-polinizador y una versión simple del modelo, se analizan condiciones que promueven la coexistencia y previenen la extinción de especies especialistas. En esta presentación se muestran tales condiciones en función de los parámetros de competencia intra- e inter-específica entre plantas, competencia intra-específica entre polinizadores y forma de la respuesta funcional de la interacción mutualista.

Las interacciones planta-polinizador son importantes ecológicamente debido a la gran cantidad de especies que dependen de estas para sobrevivir o reproducirse. Muchas especies, tanto de plantas como de polinizadores, presentan distintos estados, que podemos dividir en activos e inactivos (o dormantes), siendo los primeros los participantes efectivos de la interacción mutualista. Dichos estados se presentan en distintos períodos temporales lo que implica que estas interacciones sólo pueden realizarse en momentos específicos del año. A diferencia de los modelos clásicos de mutualismo, nuestro modelo integra tanto la distinción entre estados activos o dormantes como la existencia de estacionalidad. En este modelo cada especie  $i$  de planta está representada por cuatro variables de estado: biomasa de semillas ( $S_i$ ), de plantas ( $P_i$ ), de flores ( $F_i$ ) y de recursos florales ( $N_i$ ). Los polinizadores (insectos) están representados por biomasa de larvas ( $L_i$ ) y de adultos ( $A_i$ ). El crecimiento de los estados dormantes ( $S_i$  y  $L_i$ ) está gobernado por un término de advección dado por las derivadas parciales que representa pérdida de biomasa por envejecimiento (maduración y desarrollo). El segundo término representa pérdida de biomasa por la transición a estados adultos y el tercer término representa mortalidad. La función  $f(t)$  representa la favorabilidad del ambiente para transición dormante-adulto. La función  $g(u)$  representa el reloj biológico para dicha transición. El crecimiento en biomasa de plantas e insectos adultos está gobernado por el reclutamiento a partir de sus respectivos dormantes. En el caso de las plantas, dicho crecimiento está modulado por una función de densidad dependencia intra- e inter-específica, reguladas por el parámetro  $\alpha_{ik}$ . Las biomásas de flores y recursos florales presentan un crecimiento logístico y disminuyen con las visitas de los polinizadores. La fenología de flores

---

Centro Nacional del Medio Ambiente, mauricio.franco.c@gmail.com.

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

El trabajo es financiado por el Proyecto FONDECYT 1120958. Mauricio Franco-Cisterna recibe beca CONICYT Magíster Nacional 2013-22130068

e insectos adultos están reguladas por mortalidad tiempo-dependiente. Las condiciones de borde de este sistema representan el ingreso de semillas y larvas de edad cero. Para semillas, la condición de borde está determinada por la respuesta funcional de los polinizadores a la disponibilidad de flores, representada por la función  $\varphi(A_i, F_j)$ . Para larvas, la condición de borde está determinada por la tasa de consumo de recursos florales de los polinizadores adultos y modulada por denso dependencia intra-específica, regulada por el parámetro  $\omega_i$ . Usamos en pequeñas redes una versión simplificada de este modelo, sin estacionalidad ( $f(t) = 1, \forall t \in [0, \infty)$ ) y sin diferenciación entre dormantes de distintas edades ( $g(u) = 1, \forall u \in [0, \infty)$ ), para analizar la coexistencia de especies especialistas en función de los parámetros de competencia intra- e inter-específica entre plantas ( $\alpha_{ik}$ ), competencia intra-específica entre polinizadores ( $\omega_i$ ) y forma de la respuesta funcional de la interacción mutualista ( $\varphi(A_i, F_j)$ ).

$$\frac{\partial S_i(t, u)}{\partial t} = -\frac{\partial S_i(t, u)}{\partial u} - \mu_i^S S_i - \sigma_i S_i f_i^S(t) g_i^S(u) \quad (1)$$

$$S_i(t, 0) = \sum_j \pi_{ij} \tau_{ij} \varphi(A_j, F_i) \quad (2)$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \left( 1 - \alpha_i P_i - \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} P_k \right) v_i \int_0^\infty \sigma_i f_i^S(t) g_i^S(u) S_i du - \mu_i^P P_i \quad (3)$$

$$\frac{dF_i(t)}{dt} = r_i^F (\kappa_i P_i - F_i) f_i^F(t) - \left( \mu_i^F + \rho_i^F (1 - f_i^F(t)) \right) F_i - \sum_j \gamma_{ij} \tau_{ij} \varphi(A_j, F_i) \quad (4)$$

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = r_i^N (q_i F_i - N_i) - \sum_j \delta_{ij} \tau_{ij} \varphi(A_j, F_i) \left( \frac{\frac{N_i}{F_i}}{\varepsilon_{ij} + \frac{N_i}{F_i}} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial L_i(t, u)}{\partial t} = -\frac{\partial L_i(t, u)}{\partial u} - \mu_i^L L_i - \chi_i L_i f_i^L(t) g_i^L(u) \quad (6)$$

$$L_i(t, 0) = (1 - \omega_i A_i) \sum_j \eta_{ji} \delta_{ji} \tau_{ji} \varphi(A_i, F_j) \left( \frac{\frac{N_j}{F_j}}{\varepsilon_{ji} + \frac{N_j}{F_j}} \right) \quad (7)$$

$$\frac{dA_i(t)}{dt} = y_i \int_0^\infty \chi_i f_i^L(t) g_i^L(u) L_i du - \left( \mu_i^A + \rho_i^A (1 - f_i^L(t)) \right) A_i \quad (8)$$

# Estabilidad global en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower considerando interferencia entre los depredadores

*Javiera Gallegos Zuñiga y Eduardo González Olivares*

## Abstract

Desde la proposición del modelo de Lotka-Volterra en 1926 [7], diferentes alternativas para modelos depredador-presa tiempo-continuo han sido propuestas. Una de esas propuestas son los modelo de depredación del tipo Leslie-Gower [6, 7] que presentaremos en este trabajo, considerando los siguientes aspectos:

- i) La respuesta funcional es lineal,
- ii) existe interferencia entre los depredadores, y
- iii) La ecuación que describe el crecimiento poblacional de los depredadores es del tipo logístico.

Este último aspecto es la principal característica de este tipo de modelos [5, 6], donde la capacidad de soporte del medio ambiente (carrying capacity) es dependiente de la cantidad de presas disponibles [2, 3]. En particular, P. H. Leslie en 1948 [4] propone que la capacidad de soporte es directamente proporcional al tamaño poblacional de las presas.

El modelo a estudiar es descrito por el siguiente sistema autónomo de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

$$X_\mu : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - qxy^\alpha \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx}\right) y, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  indican los tamaños poblacionales de presas y depredadores, respectivamente, para  $t \geq 0$ , con  $\mu = (r, K, q, s, n, \alpha) \in \mathbb{R}_+^5 \times ]0, 1[$  y los parámetros tienen diferentes significados ecológicos.

Se ha probado que el único punto de equilibrio positivo (al interior del primer cuadrante) es local asintóticamente estable, para todo valor de parámetros a diferencia de otros modelos similares que tienen dinámicas más complicadas [2].

La estabilidad global se ha demostrado construyendo una función de Liapunov adecuada. Además mediante utilizando el criterio de Bendixson-Dulac [1], se ha probado la inexistencia de ciclos límites.

Se ha demostrado también que las soluciones del sistema son acotadas y se ha establecido una región de invarianza para ellas.

Para reforzar nuestros resultados se muestran algunas simulaciones, para valores específicos de los parámetros.

## References

- [1] C. W. Clark, *Mathematical Bioeconomics: The Optimal management of renewable resources*, (2nd edition), John Wiley and Sons, 1990.
- [2] E. González-Olivares, J. Mena-Lorca, A. Rojas-Palma, J. D. Flores, Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey, *Applied Mathematical Modelling* 35 (2011) 366-381.
- [3] A. Korobeinikov, A Lyapunov function for Leslie-Gower predator-prey models, *Applied Mathematical Letter* 14 (2001) 697-699.
- [4] P. H. Leslie, Some further notes on the use of matrices in population mathematics, *Biometrika* 35 (1948) 213-45.
- [5] P. H. Leslie and J. C. Gower, The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species, *Biometrika* 47 (1960) 219-234.
- [6] R. M. May, *Stability and complexity in model ecosystems* (2nd edition), Princeton University Press (2001).
- [7] P. Turchin, *Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2003.

# Dynamics of a modified Holling-Tanner predator-prey model with ratio-dependent functional response

*José D. Flores and Eduardo González-Olivares*

We present the dynamical analysis of a modified Holling-Tanner predator-prey model [6, 7] with alternative food for the predator and a ratio-dependent functional response [1, 2, 4].

$$X_\sigma : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - \frac{qxy}{ay + x} \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right) y \end{cases},$$

where  $x = x(t)$  and  $y = y(t)$  indicate the prey and predator population sizes, at time  $t \geq 0$ , respectively. The parameters are all positives with ecological meaning.

We show that the solutions are non-negatives and bounded and that the origin is a singular equilibrium point, which is always a repellor for all parameter values. We established conditions on the parameter values for the existence of positive interior points to the first quadrant, one being saddle for all parameter values (when it exists) and the other is either a repellor or an attractor surrounded by a limit cycle [5]. Also, we show the existence of a separatrix curve and an homoclinic curve dividing the behavior of the trajectories in the phase plane. Moreover, we find that for suitable selection of parameter values the two dimensional system presents saddle-node, Hopf or a Bogdanov-Takens bifurcations [3]. An important ecological conclusion of the model is that while there is no simultaneous extinction of both species; when there is no coexistence, the predator survive at the “alternative food” level in the absence of prey, a property which could be desirable in management of biological pest control.

---

Department of Mathematical Sciences, The University of South Dakota, Vermillion, USA, jflores@usd.edu

Grupo de Ecología Matemática, Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, ejgonzal@ucv.cl.

This work is partially financed by Project Fondecyt N° 1120218 and DIEA-PUCV 124.730/2012.

## References

- [1] P. Aguirre, J. Flores, E. González-Olivares, *Bifurcation and global dynamics in a predator-prey model with strong Allee effect on the prey, and ratio-dependent functional response*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 16, 235-249, 2014.
- [2] R. Arditi and L. R. Ginzburg, *Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependance*, *Journal of Theoretical Biology*, 39, 311-326, 1989.
- [3] C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications* (2nd edition), *Texts in Applied Mathematics* 34, Springer 2006.
- [4] J. D. Flores and E. González-Olivares, *Dynamics of a predator-prey model with Allee effect on prey and ratio-dependent functional response*, *Ecological Complexity*, 18, 59-66, 2014.
- [5] E. González-Olivares, J. Mena-Lorca, A. Rojas-Palma, J. D. Flores. *Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model considering a simple form to the Allee effect on prey*, *Applied Mathematical Modelling* 35, 366-381, 2011.
- [6] [18] P. H. Leslie, J. C. Gower, *The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species*, *Biometrika* 47, 219-234, 1960.
- [7] R. M. May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press, Princeton , New Jersey, 2001. Princeton University Press 2003.

# Numerical solution of a simple diffusion model of Ebola propagation by Finite Element Method

*Roxana López Cruz*

Due to the Ebola epidemics which is a generalized pandemic originated in West Africa this year, the scientifics of the biomedical areas have a real challenge to solve.

The grade of the pandemic has reached to be qualified by the World Health Organization (WHO) as phase 6 (pandemic alert), which is terrible. Into the emergency described, the different scientific institutions are doomed in the development of scientific tools which let control and predict the propagation and infection respectively of Ebola.

In this work, we set a diffusive model of the propagation of the Ebola and approximate a solution by the Finite Element Method (FEM). Finally, simulations will show some important conclusions.

The Kermack-McKendrick model is the first one to provide a mathematical description of the kinetic transmission of an epidemic in an unstructured population [3]. More generally, mixing models include proportionate mixing, preferred mixing (e.g., see Hethcote and Yorke, 1984, Diekmann and Heesterbeek 2000), structured mixing of populations in activity groups (Jacquez et al., 1989), age-dependent and other patterns (Busenberg and Castillo-Chávez, 1991), and various forms of social network structures that can model super-spreaders of infectious disease and other phenomenon (Barabasi 2002, Newman 2002).

A basic mathematical model which study the progression of a epidemic as the ebola, is the model SIR(Susceptible-Infected-Recovered) :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}\tag{1}$$

where

- $S(t)$  : susceptible density at time  $t$ .
- $I(t)$  : infected density at time  $t$ .
- $R(t)$  : dead density at time  $t$ .

- $\beta$  : infection rate.
- $\gamma$  : death by infection rate.

Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $R^2$  representing a geographical region, for example the country Perú. People use to move from high density population areas to low density ones, the reasons are different as epidemiological or economical or some other reasons; it is similar to the physical phenomenon as the heat transference. Then, for the movement of the different populations (or flux of population density) we can apply the Fick's Law, which give us the diffusive terms  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  to be add to (1). The distribution of the epidemiological population is modelled in general via the system of parabolic equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} - d_1 \nabla^2 S + \beta SI &= 0, \\ \frac{\partial I}{\partial t} - d_2 \nabla^2 I - \beta SI + \gamma I &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} - d_3 \nabla^2 R - \gamma I &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \left( \alpha_1 S + \beta_1 \frac{\partial S}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} &= \left( \alpha_2 I + \beta_2 \frac{\partial I}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = \left( \alpha_3 R + \beta_3 \frac{\partial R}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ S(., 0) &= S_0 \\ I(., 0) &= I_0 \\ R(., 0) &= 0 \end{aligned}$$

This last SIR model of ebola will be analyzed about its existence and approximation of solution by a semidiscret Finite Element Model scheme.

## References

- [1] A. Bellini-Morante and A.C. Bride. *Applied Nonlinear Semigroups* Edit. Mathematical Methods in practice, 1998.
- [2] J.P. Kaipio, J. Tervo and M. Vaughkonen. *Simulations of the Heterogeneity of Environments by Finite Element Methods*, 1994.
- [3] J. Muñoz. *Notas de Curso: Introducción a la teoría de Semigrupos y Aplicaciones*, 2009
- [4] Z. Liu and S. Zheng. *Semigroups associated with dissipative systems* Chapman and Hall/CRC, 1999.



## Dos modelos impulsivos como discretizaciones del clásico modelo epidemiológico SIR

*Rodrigo Gutiérrez–Aguilar, Fernando Córdova–Lepe.*

En este trabajo se estudian dos modelos descritos por sistemas de ecuaciones diferenciales impulsivas en tiempos fijos (IDE-FT) [1], como discretizaciones del clásico modelo epidemiológico SIR (Susceptibles-Infecciosos-Removidos) propuesto por Kermack y McKendrick [2, 3].

Considerando que el proceso de contagio es rápido y temporalmente espaciado ( $\tau$  unidades de tiempo), la correspondiente ecuación es:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = 0 \\ I'(t) = -\gamma I(t) \\ R'(t) = +\gamma I(t) \end{array} \right\} \text{ si } t \neq t_k, \quad \left\{ \begin{array}{l} S(t^+) = S(t) - \beta\tau S(t)I(t) \\ I(t^+) = I(t) + \beta\tau S(t)I(t) \\ R(t^+) = R(t) \end{array} \right\} \text{ si } t = t_k, \quad (1)$$

donde  $\beta$  y  $\gamma$  son respectivamente las tasas de contagio y de remoción.

Cuando remoción y contagio están en escalas de tiempo inversas con respecto al caso (1), la correspondiente ecuación es:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = +\beta S(t)I(t) \\ R'(t) = 0 \end{array} \right\} \text{ si } t \neq t_k, \quad \left\{ \begin{array}{l} S(t^+) = S(t) \\ I(t^+) = I(t) - \gamma\tau I(t) \\ R(t^+) = R(t) + \gamma\tau I(t) \end{array} \right\} \text{ si } t = t_k, \quad (2)$$

Notemos que las soluciones de (1) y (2) cuando  $\tau$  tiende a cero, colapsan en soluciones del modelo SIR clásico.

El estudio es realizado vía el análisis de la dinámica de los mapeos estroboscópicos asociados a (1) y (2), las preguntas de investigación son dirigidas como es usual hacia las condiciones de extinción o persistencia de la enfermedad.

## References

- [1] Fernando Córdova-Lepe, Gonzalo Robledo, Manuel Pinto and Eduardo González-Olivares. *Modeling pulse infectious events irrupting into a controlled context: A SIS disease with almost periodic parameters*, Applied Mathematical Modelling 36 1323-1337 (2012).
- [2] Kermack, WO, McKendrick, AG: *Contributions to the mathematical theory of epidemics*, Proc. R. Soc. Lond. A 115, 700-721 (1927).
- [3] A. Hastings: *Population Biology. Concepts and Models*, Springer, 1996.

## Distribución genotípica bajo mortalidad diferenciada por rasgos fenotípicos

*Héctor Rojas-Castro, Fernando Córdova-Lepe*

Una población diploide, cerrada, panmíctica y que admite un modelo de crecimiento malthusiano es compartimentada según su genotipo, para un locus determinado, en tres subpoblaciones: dos homocigotas y una heterocigota. Bajo el supuesto de que la población es un recurso de consumo humano que es explotado en una sucesión de instantes igualmente espaciados, se modela impulsivamente las frecuencias genotípicas de cada subpoblación. Lo anterior, suponiendo que cada genotipo expresa una característica fenotípica que influye en la capturabilidad del mismo. A partir de este modelo se obtienen conclusiones respecto a la variación de las frecuencias genotípicas, en función de distintos valores en el espacio de parámetros.

La variabilidad genética y la pérdida de biodiversidad se ha tornado un tema de interés para biólogos y genetistas que enfocan sus esfuerzos en la conservación, ver [1]. Como ya es sabido, ver [3], uno de los principales factores que influyen en la pérdida de variabilidad genética, y por ende de interés para la conservación genética, es la selección (no necesariamente natural). Si suponemos la población como un recurso de consumo humano, entonces la explotación de este puede interpretarse como un proceso de selección, por ejemplo, lo que ocurre con los recursos pesqueros, ver [4].

Consideremos una población mendeliana, cerrada, diploide y panmíctica, la cual admite un modelo de crecimiento malthusiano y corresponde a un recurso a extraer. Llamemos  $A$  y  $a$  a los dos posibles alelos para un locus determinado. De esta manera, es posible compartimentar la población en tres tipos de individuos según su genotipo para el locus en estudio, siendo estos  $AA$ ,  $Aa$  y  $aa$  (no existe a priori una dominancia entre estos). Denotemos por  $P_{AA}(t)$ ,  $P_{Aa}(t)$  y  $P_{aa}(t)$  las abundancias de las respectivas subpoblaciones genotípicas en el instante de tiempo  $t$ , por  $P(t) = P_{AA}(t) + P_{Aa}(t) + P_{aa}(t)$  la abundancia de la población total y por  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  las frecuencias genotípicas, ver [5] para los genotipos  $AA$ ,  $Aa$  y  $aa$  respectivamente.

Si en el instante de tiempo  $t_k$  se realiza la captura y el retiro de individuos de la población, entonces la cantidad de individuos de cada subpoblación genotípica en el instante  $t_k^+$  viene dada por:

---

Universidad Católica del Maule, hrojas@ucm.cl ; fcordova@ucm.cl  
Este trabajo es financiado parcialmente por el proyecto FONDECYT 1120218

$$\begin{cases} P_{AA}(t_k^+) = (1 - q_1 E)P_{AA}(t_k) \\ P_{Aa}(t_k^+) = (1 - q_2 E)P_{Aa}(t_k) \\ P_{aa}(t_k^+) = (1 - q_3 E)P_{aa}(t_k) \end{cases} \quad (1)$$

Donde  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  corresponde a los coeficientes de capturabilidad de los individuos con genotipo  $AA$ ,  $Aa$  y  $aa$  respectivamente, bajo el supuesto de que la capturabilidad es determinada por las características fenotípicas que cada genotipo manifiesta, y  $E$  corresponde al esfuerzo de captura (la captura será proporcional al esfuerzo de pesca ejercido), ver [2]. Así, es posible establecer el sistema de ecuaciones diferenciales impulsivas:

$$\left. \begin{cases} x'(t) = \alpha(x(t) + \frac{1}{2}y(t))^2 - \alpha x(t) \\ y'(t) = 2\alpha(x(t) + \frac{1}{2}y(t))(z(t) + \frac{1}{2}y(t)) - \alpha y(t) \\ z'(t) = \alpha(z(t) + \frac{1}{2}y(t))^2 - \alpha z(t) \end{cases} \right\} t \neq t_k, \quad (2)$$

$$\left. \begin{cases} x(t_k^+) = \frac{Q_1 x(t_k)}{Q_1 x(t_k) + Q_2 y(t_k) + Q_3 z(t_k)} \\ y(t_k^+) = \frac{Q_2 y(t_k)}{Q_1 x(t_k) + Q_2 y(t_k) + Q_3 z(t_k)} \\ z(t_k^+) = \frac{Q_3 z(t_k)}{Q_1 x(t_k) + Q_2 y(t_k) + Q_3 z(t_k)} \end{cases} \right\} t = t_k,$$

con  $Q_1 = 1 - q_1 E$ ,  $Q_2 = 1 - q_2 E$ ,  $Q_3 = 1 - q_3 E$  y  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = T$  ( $T$  constante).

A partir del modelo, se obtienen conclusiones respecto de la convergencia de las frecuencias genotípicas ( $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ ) en función de los valores en el espacio de parámetros ( $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $E$ ) y de las condiciones iniciales. Para algunos casos puntuales se presentan soluciones analíticas y para los más complejos se conjetura a partir de simulaciones.

## References

- [1] F. Allendorf and G. Luikart: *Conservation and the genetics of populations*, Blackwell Publishing, 2007.
- [2] C. Clark: *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, John Wiley & Sons, 1990.
- [3] J. González: *Ecología matemática - Segundo tomo*, Universidad Católica de Valparaíso, 2001.
- [4] P. Smith: *Genetic diversity of marine fisheries resources: possible impacts of fishing*, FAO Fisheries Technical Paper, 344, 53p, 1994.
- [5] A. Templeton: *Population genetics and microevolutionary theory*, John Wiley & Sons, 2006.

## Ciclos límites múltiples en un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower considerando efecto Allee en las presas

*Elizabeth Rozas Torres y Eduardo González Olivares*

En esta presentación estudiamos un modelo del tipo Leslie-Gower [8, 10] considerando que la presa es afectada por un efecto Allee y que los depredadores tienen un alimento alternativo [1, 2].

La característica fundamental de los modelos de este tipo es que la ecuación que describe el crecimiento de los depredadores es del tipo logístico [8, 10].

Aunque existen muchas formas matemáticas para describir el efecto Allee [6], aquí usaremos la más empleada [7].

El modelo es descrito por el sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales no lineales autónomo del tipo Kolmogorov [4, 5]

$$X_\mu : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) x - qxy \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx+c}\right) y \end{cases} \quad (1)$$

donde  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  son los tamaños poblacionales de las presas y los depredadores, respectivamente, para  $t \geq 0$  (medido como número de individuos, biomas o densidad por unidad de área o volumen); el vector de parámetros es  $\mu = (r, K, q, s, n, c, m) \in \mathbb{R}_+^6 \times ]-K, K[$  y los parámetros tienen los diferentes significados ecológicos.

Si  $m > 0$ , se tiene un *efecto Allee fuerte* y si  $m \leq 0$ , el efecto es *débil* [3, 9].

Se determinaron condiciones para la existencia de puntos de equilibrio y su naturaleza (estabilidad) local, estableciendo el diagrama de bifurcaciones.

Se probó la existencia de un ciclo límite estable, el cual es generado mediante bifurcación de Hopf, esto se da tanto para el caso efecto Allee fuerte  $m > 0$ , como débil  $m \leq 0$ . En esta presentación probaremos la existencia de al menos dos ciclos límites rodeando uno de los puntos de equilibrio positivo.

Los resultados son comparados con el modelo de Leslie-Gower modificado sin considerar efecto Allee fuerte y analizado en [7].

## References

- [1] C. Arancibia-Ibarra and E. González-Olivares, A modified Leslie-Gower predator-prey model with hyperbolic functional response and Allee effect on prey, In R. Mondaini (Ed.) *BIOMAT 2010 International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, World Scientific Co. Pte. Ltd., Singapore, 2011 146-162.
- [2] M. A. Aziz-Alaoui and M. Daher Okiye, Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes, *Applied Mathematics Letters* 16 (2003) 1069-1075.
- [3] F. Courchamp, L. Berec and J. Gascoigne, *Allee effects in Ecology and Conservation*, Oxford University Press 2008.
- [4] H. I. Freedman, *Deterministic Mathematical Model in Population Ecology*, Marcel Dekker, 1980.
- [5] B-S. Goh, *Management and Analysis of Biological Populations*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1980.
- [6] E. González-Olivares, B. González-Yañez, J. Mena-Lorca and R. Ramos-Jiliberto, Modelling the Allee effect: are the different mathematical forms proposed equivalents? In: R. Mondaini (Ed.) *Proceedings of the 2006 International Symposium on Mathematical and Computational Biology*, E Papers Servicos Editoriais Ltda., Rio de Janeiro, (2007) 53-71.
- [7] E. González-Olivares, J. Mena-Lorca A. Rojas-Palma and J. D. Flores, Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey, *Applied Mathematical Modelling* 35 (2011) 366-381.
- [8] R. M. May, *Stability and complexity in model ecosystems* (2nd edition), Princeton University Press (2001).
- [9] P. A. Stephens, W. J. Sutherland and R. P. Freckleton, What is the Allee effect?, *Oikos* 87 (1999) 185-190.
- [10] P. Turchin, *Complex population dynamics. A theoretical/empirical synthesis*, Monographs in Population Biology 35 Princeton University Press, 2003.

# Modelo matemático de control epidemiológico y sus efectos económicos

*Ma. Eugenia Solis, Fernando Córdova-Lepe*

La Bioseguridad para los países exportadores de carne es un tema de preocupación constante. La repercusión económica que puede llegar a significar la presencia de brotes infecciosos en poblaciones de animales de granja puede ser considerable, lo que ha llevado a algunos de estos países a implementar programas de control.

Un análisis de la efectividad y eficiencia de estrategias de control y erradicación de enfermedades que podrían ser aplicadas, puede ser llevado a nivel teórico mediante el estudio de modelos matemáticos construidos ad hoc.

En este trabajo, consideramos una población afectada por una enfermedad tipo SIS (Susceptibles-Infecciosos-Susceptibles) que presenta condiciones para transitar a un nivel endémico. Se modela (describir, explicar y predecir) la dinámica demográfica, económica y epidemiológica de la población a través de un sistema de ecuaciones diferenciales impulsivo. El carácter impulsivo se evidencia en que las intervenciones (hospitalización y comercialización) en el sistema se efectúan en una secuencia periódica de intervalos de tiempo.

Nuestro principal resultado es la obtención de condiciones paramétricas de umbral semejante a un número reproductivo básico, para el saneamiento de la población. Además, analizamos las consecuencias de este tipo de control, sobre ingresos y costos de la unidad productiva.

## References

- [1] Diekmann and Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley, Chichester. (2000).
- [2] Shulaw and Bowman *On-Farm Biosecurity: Traffic Control and Sanitation*. Extension FactSheet, Veterinary Preventive Medicine 6 (2001).
- [3] Córdova-Lepe, Del-Valle and Solís. *Impulsive hospitalization: Epidemiological control on farms*. In Proceedings of 2013 CMMSE. Cabo de Gata, Almería, Spain June 24-27, 2013. V2, pp. 444-455. I. P. Hamilton & J. Vigo-Aguiar Eds. (2013).

## Efecto de la latencia en un sistema depredador presa

*P. Urbani , P. Moisset de Espanes , R. Ramos-Jiliberto y L. Garay-Narváez*

En este estudio pretendemos analizar el rol de los estados latentes en las especies como determinantes de la dinámica de un sistema de depredador-presa. Nuestros análisis muestran efectos significativos de la latencia sobre las abundancias poblacionales de equilibrio, tanto del depredador como de la presa.

La diapausa o dormancia juega un rol importante en el ciclo de vida de diversos organismos. Se define como un retraso en el desarrollo, en el cual estos organismos suprimen su actividad metabólica por un tiempo específico, llamado latencia. La diapausa permite a las especies sobrellevar condiciones ambientales adversas como bajas temperaturas, ambientes hostiles, escasez de recursos y otros, jugando un rol importante en la persistencia de las poblaciones en un ambiente específico y en la dispersión entre ambientes discretos (Domis et al. 2007, Tauber et al. 1986,). El cambio climático puede generar, directa o indirectamente, modificaciones en los tiempos de la latencia, desencadenando posibles efectos adversos sobre las comunidades ecológicas. En este estudio pretendemos analizar el rol de la latencia en un sistema depredador-presa como determinante de las abundancias poblacionales de largo plazo. Como método experimental generamos un sistema de ecuaciones integro-diferenciales no homogéneas, con abundancias de adultos y estados de diapausa como variables de estado, que se muestra a continuación

$$\frac{dB_1(t)}{dt} = R \left( 1 - \frac{B_1(t)}{K} \right) \left( (1 - h_i(t)) B_1(t) + \epsilon_1 \int_0^{\infty} \sigma_1 f_1(t) g_1(u) D_1(t, u) du \right) - \beta_1 h(t) B_1(t) - X_2 Y_2 B_2(t) F_{21} \quad (1)$$

$$\frac{dB_2(t)}{dt} = \epsilon_2 \int_0^{\infty} \sigma_2 f_2(t) g_2(u) D_2(t, u) du + (1 - h_2(t)) X_2 Y_2 B_2(t) F_{12} - \mu B_2(t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial D_1(t, u)}{\partial t} = - \frac{\partial D_1(t, u)}{\partial u} \sigma_1 f_1(t) g_1(u) D_1(t, u) - m_1 D_2(t, u) \quad (3)$$

---

Centro Nacional del Medio Ambiente, Av. Larraín 9975, Santiago, Chile, purbanir@gmail.com  
Instituto de Filosofía y Ciencias de la Complejidad, IFICC. Los Alerces 3024, Santiago, Chile  
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile, Blanco Encalada 2120 Piso 7, Santiago, Chile

El trabajo es financiado por los Proyectos FONDECYT 1120958 y 3130366.



$$\frac{\partial D_2(t, u)}{\partial t} = -\frac{\partial D_2(t, u)}{\partial u} \sigma_1 f_2(t) g_2(u) D_2(t, u) - m_2 D_2(t, u) \quad (4)$$

Con condiciones de borde

$$D_1(t, u = 0) = \eta \beta_1 h_1(t) B_1(t) \quad (5)$$

$$D_2(t, u = 0) = \kappa h_2(t) X_2 Y_2 B_2(t) F_{21} \quad (6)$$

La función  $F_{21}$  describe la fracción realizada de la tasa máxima de consumo del rotífero hacia el alga. Está dada por

$$F_{21} = \frac{B_2^\theta(t)}{B_{02}^\theta + B_2^\theta(t)} \quad (7)$$

El sistema es parametrizado a partir de literatura y razones alométricas. Se observa que la presencia de estados latentes ejerce efectos significativos sobre la dinámica de un sistema depredador presa, alterando los patrones de abundancia de equilibrio en comparación con sistemas que no exhiben latencia.

## References

- [1] N. de Senerpont Domis, Mooij, Hulsmann, van Nes, Scheffer: *Can overwintering versus diapausing strategy in Daphnia determine match-mismatch events in zooplankton-algae interactions?*, Global change and conservation ecology, 150, 682–698, 2007.
- [2] Tauber, M.J., Tauber, C.A., Masaki, S., *Seasonal Adaptations of Insects*, Oxford University Press, Oxford, p.411, 1986.

# Análisis de la Estructura Espacial de Biorreactores en un proceso de descontaminación mediante Digestión Anaerobia

*Diego Vicencio Morales*

El presente trabajo trata sobre el desarrollo de un modelo de digestión anaerobia, haciendo comparaciones de desempeño entre distintas configuraciones espaciales de los biorreactores. Primero se plantea un modelo como base para hacer comparaciones, y luego se estudia una disposición espacial alternativa, comparando tanto desempeño de descontaminación, como producción de biogas. El objetivo del trabajo es plantear lineamientos y alternativas de diseño y control para plantas de tratamiento con digestión anaerobia.

El proceso de descontaminación anaerobia presenta interés de investigación, debido a ciertas ventajas que presenta en contraste con procesos aeróbicos, tales como escasos requerimientos energéticos, y la capacidad de recuperar energía a partir de emisiones de metano, pese a presentar ciertos problemas de inestabilidad en ciertas situaciones. En el presente trabajo se ha utilizado el modelo desarrollado en [1], que consiste en un proceso de descontaminación con dos bacterias, denominadas acidogénica y metanogénica, que proceden de la siguiente forma: el contaminante entra al compartimiento de las bacterias, que es consumido por la bacteria acidogénica, que luego produce substrato metanogénico, para ser consumido por la segunda bacteria, que a su vez emite metano y dióxido de carbono.

El proceso presenta dificultad a la hora de analizarse, debido a que la bacteria acidogénica sigue una dinámica de crecimiento Monod, pero la bacteria metanogénica sigue una dinámica de crecimiento Haldane, lo que resulta en que si la bacteria acidogénica produce excesivos niveles de substrato metanogénico, esto saturará el ambiente de la bacteria metanogénica, conduciendo a la muerte de dicha población, de modo que se hace requerido el controlar la producción de substrato metanogénico.

El modelo presentado en [1] plantea la configuración espacial de tener las dos bacterias en un solo tanque. El modelo que se ha investigado para el presente trabajo consta de un sistema de dos tanques, donde las bacterias están aisladas entre sí. En el primer tanque, la bacteria acidogénica consume contaminante, lo cual produce substrato metanogénico para ser consumido por la bacteria en el segundo tanque, produciendo metano en dicho proceso.

El siguiente modelo se considera tomando dos tanques de volumen  $rV$  y  $(1-r)V$  con  $r \in ]0, 1[$ , de tal forma que sus volúmenes sumen  $V$  el volumen total, y los subíndices de cada

---

Universidad Técnica Federico Santa María, [diego.vicencio@usm.cl](mailto:diego.vicencio@usm.cl)

El trabajo es financiado por Anillo Project 10336: Control Problems, Analysis & Applications (APCA) y auspiciado por la Universidad Técnica Federico Santa María

tanque son 1 y 2. En el tanque 1 reside la bacteria acidogénica, en el tanque 2 la bacteria metanogénica. No existe invasión entre los tanques.

$$\begin{cases} \dot{X}_{A1}(t) = \mu_A(S_{A1})X_{A1} - \alpha \frac{D}{r} X_{A1} \\ \dot{S}_{A1}(t) = -k_1 \mu_A(S_{A1})X_{A1} + \frac{D}{r}(S_{AI_n} - S_{A1}) \\ \dot{S}_{A2}(t) = \frac{D}{1-r}(S_{A1} - S_{A2}) \\ \dot{X}_{M2}(t) = \mu_M(S_M)X_M - \alpha \frac{D}{1-r} X_M \\ \dot{S}_{M1}(t) = k_2 \mu_A(S_{A1})X_{A1} + \frac{D}{r}(S_{MI_n} - S_{M1}) \\ \dot{S}_{M2}(t) = -k_3 \mu_M(S_{M2})X_{M2} + \frac{D}{1-r}(S_{M1} - S_{M2}) \end{cases}$$

Donde los valores son:

- $X_{Ai}$ : Población de Bacteria Acidogénica en el tanque  $i$ .
- $S_{Ai}$ : Substrato Acidogénico en el tanque  $i$ .
- $X_{Mi}$ : Población de Bacteria Metanogénica en el tanque  $i$ .
- $S_{Mi}$ : Substrato Metanogénico en el tanque  $i$ .
- $D$ : Caudal dividido por volumen total del sistema.

Las conclusiones que se han extraído del análisis del sistema son que, de mantener el volumen total constante en ambas configuraciones, para el proceso de descontaminación, el sistema con un solo tanque para las bacterias proporciona mejor desempeño en este caso que el modelo propuesto, pero por otra parte, se encuentra que existe una mejora en la producción de metano para determinadas configuraciones en el sistema con tanques separados para las bacterias. Las condiciones de dicha mejora dependen de los niveles de Dilución en cada tanque, cuya variable de decisión en este caso es la proporción de volumen entre los tanques.

Trabajo posterior a desarrollar se plantea en profundizar el análisis de estabilidad, y plantear Optimización Transiente, i.e. el optimizar el tiempo del sistema en alcanzar las trayectorias de convergencia a los óptimos.

## References

- [1] Bernard, Hadj-Sadok, et al.: *Dynamical Model Development and Parameter Identification for an Anaerobic Wastewater Treatment Process*, Biotechnology and Bioengineering, Vol. 75, No. 4, 424–438, Noviembre 2001.

# Divulgación y Didáctica de la Matemática

# La Educación Estadística como Campo de Investigación. Significado y Comprensión de los Conceptos Estadísticos

*Hugo Alvarado Martínez*

## Abstract

Se presenta las perspectivas de la educación estadística como campo de investigación, en el marco de las áreas de didáctica de la matemática, la estadística y la psicología. Se enfatiza la aproximación a la investigación en didáctica de la probabilidad y estadística a partir del significado de las ideas estadísticas fundamentales. Así también, en las componentes de análisis de textos, diseño de configuraciones didácticas, el aprendizaje orientado a pequeños trabajos científicos, y el desarrollo del sentido estadístico en los distintos niveles educativos.

## References

- [1] H. Alvarado: *El sentido estadístico de las distribuciones muestrales en los niveles educativos*, En Andrade, L. (Ed.). Memorias del Primer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica. Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Educación Estocástica, 47–58, 2014.
- [2] H. Alvarado: *Didáctica de la Estadística en la educación superior*, En A. Salcedo (Ed.), Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas, 319–342. ISBN: 978-980-00-2744-8, 2013.
- [3] H. Alvarado, M. Galindo, L. Retamal: *Comprensión de la distribución muestral mediante configuraciones didácticas y su implicación en la inferencia estadística*, Enseñanza de las Ciencias, 31(2), 75–91, 2013.

- [4] H. Alvarado, N. Segura: *Significado de las distribuciones muestrales en textos universitarios de estadística*, Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 7(2), 54–71, 2012.
- [5] H. Alvarado, L. Retamal: *Dificultades de comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios*, Educación Matemática, 24(3), 119–130, 2012.
- [6] C. Batanero, C. Díaz, J. Contreras, R. Roa: *El sentido estadístico y su desarrollo*, Números, 83, 7–18, 2013.

# Propuesta de aprendizaje sobre funciones exponencial y logaritmo

*Valentina Chaparro Aguilera, Belén Luke Farías*

## Abstract

Se expondrá los resultados de una propuesta de aprendizaje sobre las funciones exponencial y logaritmo con estudiantes de segundo medio (14 -15 años). El estudio de corte cualitativo muestra alcances en dos grupos de poblaciones y como una articulación apropiada de procesos cognitivos, permite que los estudiantes conjeturen y resuelvan un problema de dinámica poblacional apoyados con un software dinámico.

El trabajo se centra en enseñar las funciones exponencial y logaritmo desde un punto de vista analítico y privilegiando gráficamente una mirada en conjunto. Ambas funciones son tratadas en segundo medio (15 años) con un mayor énfasis a propiedades algebraicas, y es recién en cuarto medio que se tratan como una inversa de la otra pero aun sin el énfasis en el tratamiento gráfico y la relación existente entre ambas funciones. Por otro lado, el estudio de la función exponencial suele ser presentada en el liceo como una función que modela el crecimiento poblacional pero de un proceso discreto sin clara alusión (o nula) al proceso continuo al que obedece, y más bien con un soporte a lo intuitivo.

El hábitat de estas funciones en textos escolares, hemos observado que se privilegia la existencia de un trabajo algebraico de los algoritmos asociados a las funciones por sobre estudiar su comportamiento analítico, es decir, existe una “algebrización” de estos contenidos. La riqueza del álgebra es extremadamente necesaria para las nociones matemáticas, y en particular para estas funciones, sin embargo, en el tratamiento de ellas requiere de una articulación con otros procesos cognitivos como la visualización para no invisibilizar su existencia y propiedades.

La investigación de Mendoza, Nesterova y Ortega [3] aborda la enseñanza de las funciones en estudiantes de licenciatura en matemática en México afirman que suele dársele más énfasis a los procedimientos analíticos y de algoritmización, dejando de lado argumentos visuales sin considerar, la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige. En la investigación de Ferrari y Nazario [1] desarrollada específicamente en la función logaritmo, para en participantes de la escuela de invierno de Matemática Educativa (Yucatán, México), la autora hace un estudio epistemológico y señala la importancia que se le debe otorgar en la enseñanza del logaritmo al conocer su naturaleza epistémica “en general, los estudiantes

realizan operaciones o cálculos con funciones mecánicamente, sin conocer la naturaleza de esta, no le dan el significado esperado por los profesores a las expresiones, como en el caso de la función logaritmo” (p. 655)

El estudio ha sido de corte cualitativo, mediante estudio de casos con dos grupos de estudiantes. El primero 30 estudiantes de segundo año medio de un establecimiento particular subvencionado y el segundo grupo, 12 estudiantes de primer y segundo año medio provenientes de establecimientos públicos y particulares subvencionados participantes de un programa de la universidad orientado a estudiantes con talento académico. Si bien es cierto, la investigación no tiene un enfoque comparativo entre las poblaciones, ella busca establecer y estudiar los argumentos y articular procesos en la construcción de las nociones diseñadas en la propuesta de aprendizaje.

Esta investigación se inscribe en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, ETM [2], en el dominio del Análisis. Ello nos ha permitido situar el problema en términos teóricos precisos y, en particular, analizar con detención el rol que cumplen las distintas componentes de los planos epistemológico y cognitivo, y como estas al articularlas mediante tres génesis : discursiva, instrumental y semiótica favorecen el conocimiento en matemáticas. Un estudio del ETM de referencia fue desarrollado para comprender los procesos y abordar la transposición didáctica en la propuesta de aprendizaje.

La propuesta de aprendizaje fue desarrollada en dos sesiones, con uso de un software dinámico. En la primera sesión se aborda la función exponencial en un problema de crecimiento poblacional, para centrar la atención y a partir de un razonamiento en tiempo discreto, se analiza que ocurre si la distancia en los tiempos es cada vez menor, con el fin de utilizar la idea intuitiva de límite para obtener el número  $e$  y posteriormente hacer el pasaje a la función misma. En la segunda sesión se abordan las propiedades de la función exponencial y logaritmo apoyados en una reflexión, como transformación isométrica, pero sin perder su naturaleza como funciones.

Los resultados obtenidos son analizados y se presentan en esta comunicación las producciones de estos estudiantes, pero así también las dificultades obtenidas en la construcción de estas nociones y saberes. Esto nos permite reflexionar pero tener un accionar para las mejoras de un proceso de transposición didáctica de la función exponencial y logaritmo como un aporte en el desarrollo del ETM personal para los estudiantes.

## References

- [1] Ferrari, Nazario : *El logaritmo a partir de la cuadratura de una función*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol 22, 655 - 663, 2009.
- [2] Kuzniak, Alain : *L'Espacio de Travail Mathématique et ses Genèses*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol 16, 9-24, 2011.
- [3] Mendoza, Nesterova, Ortega: *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol 22, 561 - 571, 2009.



# Pensamiento Proporcional en la Escuela: Es efectiva su Enseñanza?

*Lino Cubillos Silva*

## Abstract

La enseñanza de la proporcionalidad en contextos escolares y su relación con el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes son temas que han preocupado y siguen preocupando a investigadores y docentes por cuanto, a pesar de su importancia no es enseñado en la escuela con la profundidad y exhaustividad requeridas. ¿Cuáles son las principales dificultades cognitivas, epistémicas y didácticas que enfrentan los profesores en su enseñanza? ¿Cuáles son los errores que frecuentemente cometen los estudiantes durante su estudio? ¿Qué aspectos didácticos y matemáticos no son suficientemente considerados por los profesores? ¿Qué estrategias de enseñanza se han propuesto para superar las dificultades de su aprendizaje? La propuesta didáctica que aquí se describe está pensada para ser aplicada en cursos de formación didáctico-matemática de profesores primarios en ejercicio y también de estudiantes de pedagogía en educación básica. La propuesta se apoya en el enfoque teórico que brinda la teoría de los registros semióticos de Raymond Duval y aprovecha, complementariamente, las posibilidades que en dicho marco de referencia ofrecen las hojas de cálculo y el software de código abierto Geogebra.

Uno de los tópicos más relevantes del segundo ciclo de la educación básica (grados 5 a 8) es el de la proporcionalidad. En los Principios y Estándares de la NCTM (2000, p. 217) se señala que: "[...] la proporcionalidad es un elemento integrador importante que conecta muchos temas matemáticos estudiados en los grados 6-8" y que su relevancia curricular llega a tal punto que incluso su grado de dominio bien pudiera considerarse como "[...] una medida de la comprensión de las ideas matemáticas elementales, y también es parte de la fundamentación de conceptos más complejos" (Lamón, 2005, p.3). La proporcionalidad como tópico o contenido curricular matemático se encuentra estrechamente vinculada a la habilidad de pensamiento o razonamiento matemático (proportional thinking) conocida como razonamiento proporcional y que no es otra cosa que el mismo pensamiento matemático actuando sobre problemas en los cuales están involucradas magnitudes a través de razones y que por ende se basan en la comparación de naturaleza multiplicativa en lugar de comparaciones de carácter aditivo. No obstante la sencillez de las nociones de pensamiento aditivo y pensamiento multiplicativo, el tránsito de un tipo de pensamiento al otro presenta complejidades de tipo didáctico y cognitivo para nada triviales y es resulta bastante evidente

que buena parte de las personas no llegan a desarrollar esta forma de razonamiento de manera adecuada. La mayoría de los estudiantes solo aprende unas reglas operatorias universales que aplican, acríticamente, a cualquier situación problemática que sea o que parezca ser un problema de proporcionalidad. Esta situación afecta el desarrollo de habilidades matemáticas de uso habitual en la vida cotidiana de las personas comunes. Esta mecanización tiende a inhibir el desarrollo del razonamiento proporcional y contribuye a sustituir el análisis cuidadoso, reflexivo y en profundidad de la verdadera naturaleza de una situación problemática. Solo la ausencia de este tipo de análisis explicaría como algunas personas pueden caer en el exceso de pensar que si dos camisas tendidas al sol tardan tres horas en secarse entonces cuatro camisas necesitarán seis horas para el mismo propósito...? En Chile las bases curriculares señalan con claridad que el propósito formativo fundamental de la educación matemática escolar es el desarrollo de pensamiento matemático, en sus distintas expresiones, en lugar de la sobredimensionada y reductiva ejercitación mecánica desprovista de análisis y reflexión. La práctica pedagógica en los espacios escolares habituales mantiene una persistente opción por la realización de ejercicios repetitivos y superficialmente trabajados, no solo en relación a la enseñanza de la proporcionalidad sino de muchos temas tan relevantes como este. Cabe preguntarse entonces si los profesores cuentan con las herramientas conceptuales, matemáticas y didácticas, necesarias para acometer exitosamente la enseñanza de la proporcionalidad y a partir de dicho trabajo desarrollar competencias de razonamiento proporcional en sus estudiantes? Los programas de formación docente abordan con la profundidad y exhaustividad necesaria el estudio de la proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento proporcional? Cómo se podría mejorar el desempeño de los docentes, en ejercicio y en formación, en la enseñanza de la proporcionalidad y el desarrollo de las habilidades cognitivas involucradas? Para la matemática la proporcionalidad es básica y fundamentalmente una igualdad entre dos razones. Se ha estudiado bastante la naturaleza de las razones y las diferentes formas en que ellas pueden ser leídas e interpretadas. Para la matemática es muy claro que toda razón puede, finalmente, ser expresada como una fracción y que a partir de entonces se opera con ella de acuerdo a las reglas operatorias propias de las fracciones. Un desarrollo más reciente consiste en expresar la proporción como una función lineal en la cual a cada variación de la variable independiente, representada en el eje de las abscisas, corresponde una variación de la variable dependiente representada en el eje de las ordenadas. En esta concepción la proporcionalidad directa se expresa como la función  $f(x) = k \cdot x$ , siendo  $x$  un número real y  $k$ , distinto de cero, es la constante de proporcionalidad. De modo análogo se define la proporcionalidad inversa como la función  $x \cdot y = k$ , en donde  $k$ , distinta de cero, es la constante de proporcionalidad mientras que  $x$  e  $y$  son las variables, covariantes, cuyo producto permanece constante. La propuesta de trabajo se posiciona desde la perspectiva de la teoría de los registros semióticos de Duval y desde ese encuadre interpreta las dificultades didácticas y epistémicas que involucra el desarrollo del pensamiento proporcional así como también se inspira para el desarrollo de propuestas didácticas que mejoren su enseñanza. La descripción que hace Duval de los diferentes registros de representación de los objetos matemáticos y de cómo una enseñanza apoyada en múltiples registros mejora las oportunidades de comprensión resulta pertinente al estudio, planteamiento y resolución de problemas de proporcionalidad. Adicionalmente se emplea la hoja de cálculo y el software Geogebra como espacios virtuales de experimentación y análisis de variables y fenómenos proporcionales reales o aparentes.

## References

- [1] David Ben-Chaim, James Fey, William Fitzgerald, Catherine Benedetto y Jane Miller, El razonamiento proporcional en alumnos de 7o grado con diferentes experiencias curriculares. *Educational Studies in Mathematics* 36, pp. 247-273). (1998)
- [2] Duval, R., *Semiosis y Pensamiento Humano*. Segunda Edición, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía Grupo de Educación Matemática. (2004)
- [3] Godino, J. Batanero, C, *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452. (2002)
- [4] Rhode Island Department of Education Office of Instruction, *Proportional Reasoning a Research Based Unit of Study for Middle School Teachers*. (2007),
- [5] Lim, K. H., Burning the candle at just one end: Using non proportional examples helps students determine when proportional strategies apply. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14, 492-500. (2009).

# Identidad Profesional de Estudiantes de Pedagogía en Educación Matemática en un Contexto de Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra Escolar

*Rodrigo Panes Ch., Miguel Friz C., Susan Sanhueza H.*

## Abstract

Se expone estado de arte de la línea de investigación de la identidad profesional del profesor de matemática y una propuesta metodológica para el análisis de éstas en estudiantes de pedagogía en educación matemática, dichos elementos forman parte de investigación doctoral que busca analizar las manifestaciones de las identidades profesionales de estudiantes de pedagogía básica y media en un contexto de discurso relativo a la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar.

Diversos trabajos de investigación han puesto de manifiesto la importancia de caracterizar la perspectiva profesional a partir de los procesos de formación de estudiantes para maestros (Llinares, 1998, Ponte y Chapman, 2006, Rey et al., 2006, Penalva et al., 2004, Sánchez et al., 2006, Llinares et al., 2008, Friz et al., 2013). Estos trabajos reconocen que los futuros profesores combinan conocimiento desde diferentes dominios para interpretar la actividad matemática, las respuestas de sus alumnos y planificar la enseñanza. En estas actividades, los estudiantes para maestro ponen en juego diferentes concepciones de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, que tienen que ver con sus propias experiencias y que inciden en las tareas profesionales que ellos trasladan al aula en el desarrollo de prácticas profesionales y/o en el propio ejercicio de la profesión. Los estudiantes para maestro tratan de compatibilizar exigencias personales con requerimientos admitidos socialmente. Es decir, por una parte exigencias que proceden de sus propias concepciones (conocimientos y creencias) sobre cómo debe ser la enseñanza de las matemáticas y los recursos que poseen para hacerlo.

Por otra parte, desde perspectivas externas a ellos mismos se plantean cómo manejar las características del contexto en el que se encuentran (Llinares, 1998, Sanhueza, Penalva y Torregrosa, 2009). Además, el modelo de enseñanza experimentado en la escuela primaria y secundaria marcan las concepciones de los estudiantes para profesor sobre diversos aspectos de las matemáticas y de su enseñanza-aprendizaje, como el contenido matemático escolar, los objetivos de la enseñanza de las matemáticas, el currículo matemático, el tipo de tareas a

---

Universidad del Bío-Bío, [crpanes@ubiobio.cl](mailto:crpanes@ubiobio.cl)

El trabajo es patrocinado por el Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Católica del Maule.

desarrollar, la relación con la Educación Matemática así como la interpretación de su propio proceso formativo (Barrantes y Blanco, 2004, Friz, Sanhueza y Sánchez, 2009).

La formación de profesores de matemáticas tiene un carácter complejo y multidimensional y está determinada por el contexto social. La construcción de conocimiento ocurre no sólo desde una perspectiva individual, sino también desde la perspectiva social (Lave y Wenger, 1991). Desde una perspectiva sociocultural del aprendizaje, destacamos la importancia de considerar las clases de formación de profesores como comunidades de práctica. El aprendizaje es visto como formas fundamentales de prácticas sociales (Lave y Wenger, 1991; Wenger, 1998). Las cuestiones referidas a los mecanismos a través de los cuales lo colectivo y lo común entran a formar parte de las actividades individuales de los aprendices también pertenece al campo de la investigación educativa del aprendizaje (Sfard y Prusak, 2005). Estas autoras consideran que la noción de identidad es central en los nuevos discursos de investigación para dar sentido a las diferencias que se manifiestan entre diferentes personas y sus formas de aprender. Para Nasir (2007) este tipo de estudios requiere un análisis de cómo los estudiantes desarrollan sus identidades como miembros de una comunidad de práctica. Indica que las identidades que los estudiantes construyen en relación con su participación en comunidades de práctica constituyen una componente relevante de la comprensión del aprendizaje. Al igual que en el trabajo de Nasir en la investigación de Penalva la identidad de los estudiantes para maestro genera aprendizaje social.

En esta investigación, estamos interesados en analizar las manifestaciones de las identidades profesionales de estudiantes de pedagogía en educación básica y educación media en un contexto de discurso relativo a la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Para ello, se espera (a) conocer la valoración que realizan los estudiantes de pedagogía sobre las competencias profesionales relativas a la enseñanza del álgebra escolar, (b) describir los temas de conversación presentes en los discursos de los estudiantes de pedagogía cuando reflexionan sobre sus experiencias relacionadas con la enseñanza y al aprendizaje del álgebra y (c) relacionar las identidades manifestadas por los futuros profesores relativas a la enseñanza del álgebra escolar con las competencias profesionales.

Considerando estos antecedentes la comunicación pretende mostrar el estado de arte en la línea de investigación de identidad profesional del profesor de matemática, los antecedentes estudiados dan pie a una propuesta metodológica que proponemos socializar.

## References

- [1] Barrantes, M. Blanco, H.(2004): *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar*, Enseñanza de la Ciencias, 22(2), 241-250.
- [2] Friz, M. Sanhueza, S. Panes, R.(2012): *Identidades de los maestros en formación: El caso de Chile y España*, XV Jornadas Nacionales de Educación Matemática, Universidad Católica de Temuco.
- [3] Gee, J.P.(2001): *Identity as an analytic lens for research in education*, Review of Research in Education, 25, 99-125.
- [4] Nasir, N. (2007): *Identity, Goals, and Learning: The Case of Basketball Mathematics*, Nasir y P. Cobb (Eds.), *Improving Access to Mathematics: Diversity and Equity in the Classroom* (pp. 132-145), New York: Teachers College Press.

- [5] Ponte, J.P. Chapman, O. (2006): *Mathematics teachers Knowledge and Practices*, A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 461-494), Rotterdam: Sense Publishers.
- [6] Sanhueza, S. Penalva, M.C. Torregrosa, G. (2009): *Evaluación de competencias matemáticas y profesionales relativas a la educación infantil*, En VII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. Universidad de Alicante, España.
- [7] Sfard, A. Prusak, A (2005): *Telling Identities: In Search of an Analytic Tool for Investigating Learning as a Culturally Shaped Activity*, Educational Researcher, 34(4), 14-22.
- [8] Wenger, E. (1998): *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*, Cambridge, UK.

## Relación entre el Medio y el Contrato Didáctico

*Ismenia Guzmán R.*

Los conceptos de Medio y de Contrato didáctico, están presentes desde los primeros trabajos de Brousseau, pero se ha profundizado con avances teóricos que los han vinculado en relación con otros conceptos de la teoría estudiados por investigadoras como C. Margolinas, M J Perrin-Glorian, M. Hersant entre otros investigadores. Ellos son esenciales en la teoría de Situaciones tanto a nivel de diseño de situaciones de aprendizaje como en investigación donde funcionan como instrumentos teóricos para el análisis de diseños y validación de situaciones de aprendizaje y secuencias de clases reales. La situación didáctica se compone de una situación adidáctica y de un contrato didáctico adidáctica. La situación adidáctica ha sido organizada por el profesor con fines de aprendizaje, el Contrato Didáctico regula las expectativas recíprocas del profesor y de los alumnos a propósito del saber; además regula las relaciones de los alumnos con el Medio. La intervención del profesor modifica las condiciones de funcionamiento del saber, condiciones que también forman parte de lo que el alumno aprende. El objetivo final del aprendizaje es que el alumno pueda hacer funcionar este saber en situaciones sin la intervención del profesor; es decir un funcionamiento adidáctico del alumno en clase. ¿La enseñanza tiene por objetivo principal el funcionamiento del conocimiento como producción libre del alumno en sus relaciones con un medio adidáctico? ( Brousseau 1990p 324) M. Hersant afirma que ¿El contrato didáctico es un soporte esencial de los juegos sobre el Medio con el fin de preservar una actividad matemática consistente para los alumnos?( Hersant 2014, pp 13).

Brousseau (1988) Contrat Didactique et Le Milieu , Recherches en didactiques de Mathématiques Vol 9. 3 pp, 309-336.

Comiti, Grénier, Margolinas (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situations de classe et Modelisations de phénomènes didactiques.

Margolinas C. (2002). Situations, milieux, connaissances ? Analyse de l'activité du professeur. In, J.L.Dorier et al. (eds) (2002). Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, 141-156. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Perin Glorian, Hersant ( 2003) Milieu et Contrat Didactique outil pour l'analyse de séquences ordinaires. Recherches en didactique des mathématiques. Vol 23.2 pp 217.276.

Hersant ( 2014) Facette épistémologique et facette social du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves.

# Literacidad y Discurso Matemático para el Aprendizaje Escolar: un estudio en alumnos en formación Inicial docente

*Ana Carolina Maldonado Fuentes, Francisco Rodríguez Alveal, Pedro Sandoval Rubilar*

## Abstract

El acto comunicativo desarrollado en el aula de matemáticas involucra elementos del lenguaje materno y matemático. Por otro lado, el pensamiento matemático es parte del proceso de escolarización vinculado al desarrollo de la literacidad (Preiss, Larraín y Valenzuela, 2011), entendida como una nueva forma de entender la alfabetización, vinculada al uso funcional de la lengua y de distintos códigos especializados para actuar en el mundo.

Lo anterior permite reconocer la función de metalenguaje del idioma materno que funciona "como un recurso desde el cual se definen o redefinen lingüísticamente los términos técnicos de la disciplina" (Manghi, 2013, p.4). Asimismo, hace referencia al lenguaje matemático, entendido como "el código empleado por una persona para transmitirle a otra(s) persona(s) ideas matemáticas" Beyer (1994, p.59). Esto último se evidencia en expresiones del vocabulario matemático como por ejemplo los términos "función", "entonces", "si y sólo si", "por lo tanto" en el caso representaciones gráficas (Histogramas, Polígonos de frecuencia, entre otros).

En especial, considerando las orientaciones curriculares vigentes, que plantean tanto el dominio de la lengua hablada y escrita (aprender a leer y a comprender información de diversos tipos) como también de manera prioritaria, el uso del "lenguaje de las matemáticas, sus conceptos, sus procedimientos y su razonamiento, como herramientas para entender el mundo y para actuar frente a problemas cotidianos" (MINEDUC, Bases Curriculares, 2013, p.8)

Por tanto, un primer desafío es lograr que el aprendizaje matemático se efectúe en una forma específica de representación y comunicación ("discurso matemático"), a fin de promover que los estudiantes logren pensar matemáticamente, más allá de realizar procedimientos rutinarios y en forma mecánica; asunto difícil de alcanzar si no se cuenta con una sólida formación en literacidad matemática. Sin embargo, surge un segundo desafío, si a la dificultad inherente a la manipulación del lenguaje matemático se suma la complejidad de conjugarse con las



diversas formas de manifestación del lenguaje materno y la comunicación de razonamiento matemático, suponiendo el dominio de habilidades propias de la comunicación oral, la lectura y escritura (literacidad).

En coherencia, estudios previos han abordado de manera integrada la evaluación de habilidades, dejado en evidencia que existen resultados descendidos en estudiantes en Formación Inicial Docente (FID) en comprensión lectora y razonamiento matemático (Rubilar, Carrillo, Fuentes y Alveal, 2010; Maldonado, Sandoval y Rodríguez, 2012); así como en alfabetización estadística (Alveal y Sandoval, 2012). Por otro lado, se suman los resultados del sistema escolar, fundamentalmente con desempeños deficitarios en la Prueba PISA (2013), que mide las áreas de Lenguaje, Matemática y Ciencias. Entonces, cabe preguntarse si parte de los bajos resultados en pruebas nacionales e internacionales en matemática podría ser explicado por el acto comunicativo desarrollado por los profesores en el proceso enseñanza y aprendizaje, específicamente asociado a literacidad.

## References

- [1] ALVEAL, Francisco Rodríguez and SANDOVAL, Pedro Rodrigo. *Habilidades de codificación y decodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en enseñanza básica*. Avaliação (Campinas).Vol.17, n.1, pp. 207-235. 2012.
- [2] BEYER, W. *El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula*. Trabajo de grado de maestría no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, Caracas..
- [3] MANGHI, Dominique. *La mediación del profesor especialista para la alfabetización semiótica en el aula de matemática*. Capítulo 5 en Estela I. Moyano (Coordinadora). *Aprender ciencias y humanidades: una cuestión de lectura y escritura. Aportes para la construcción de un programa de inclusión social a través de la educación lingüística* (en prensa). 2013.
- [4] MALDONADO FUENTES, Ana Carolina; SANDOVAL RUBILAR, Pedro and RODRIGUEZ ALVEAL, Francisco. *Comprensión lectora en la formación inicial docente: estudiantes de educación general básica en una universidad del Consejo de Rectores*. Folios. N.35, pp. 33-47. 2012
- [5] MINEDUC *Bases Curriculares para la Educación Básica* 2012.
- [6] PREISS, David; LARRAIN, Antonia y VALENZUELA, Susana. *Discurso y Pensamiento en el Aula Matemática Chilena*. Psykhe . vol.20, n.2, pp. 131-146. 2011.
- [7] RUBILAR, Pedro Rodrigo Sandoval; CARRILLO, Miguel Frit; FUENTES, Ana Carolina Maldonado and ALVEAL, Francisco Rodríguez. *Evaluación de habilidades en matemática y comprensión lectora en estudiantes que ingresan a pedagogía en educación básica: un estudio comparativo en dos universidades del Consejo de Rectores*. Educar em Revista N.spe2, pp. 73-102. 2010

# Cambio Del Profesor y Resolución De Problemas De Final Abierto

*María Victoria Martínez Videla*

## Abstract

El foco es comprender y describir el cambio del profesor desde su propia perspectiva en torno a la resolución de problemas. Se considera el cambio del profesor como un proceso interno y externo, que implica el sistema de creencias y actitudes y cambios a nivel cognitivo. Por lo anterior, y mediante el uso de entrevistas utilizando viñetas como herramienta metodológica, se trabajó en la identificación de elementos que favorecen el cambio en el sistema de creencias y la forma de trabajar la resolución de problemas en un grupo de 10 profesores, que han participado en un proyecto implementando la resolución de problemas de final abierto a lo largo de tres años. Hemos observado que los profesores identifican y declaran los cambios en la forma en que trabajan la resolución de problemas y, a partir de ello, ha sido posible elaborar una categorización de estos cambios que responden a los diversos componentes del cambio del profesor: creencias sobre el aprendizaje, la enseñanza, la práctica el cambio, y el conocimiento matemático para la enseñanza, entre otros.

## Cambio del profesor

En matemática se ha ido cambiando el centro de la actividad disciplinar desde el cálculo y los procedimientos, hacia el análisis. Se ha movilizó el foco desde aprendizaje de contenidos hacia el desarrollo de competencias matemáticas como: razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, usar lenguaje disciplinar (OECD, 2004). Dada la difícil materialización de un cambio de paradigma como el descrito, se hace entonces imprescindible estudiar el cambio del profesor (teacher change), entender la complejidad de éste, cuáles son sus componentes, buscar explicaciones a su ausencia y formas que sean más propicias para su existencia. El cambio del profesor es un proceso que se refiere al "territorio interno y mental" de la sala de clases y obedece a un ingrediente clave que es la conciencia y necesidad de cambiar. En la literatura encontramos que se ha estudiado el importante rol que juegan las creencias y actitudes en la capacidad de cambio que tiene el profesor, entendiendo las creencias como las disposición a actuar de una determinada manera y no solo como una verbalización de lo que se cree (Wilson y Cooney, 2003). En particular, la investigación en torno a creencia en educación matemática, ha definido tres categorías en el Sistema de creencias (Op?T Eynde, De Corte and Verschaffel, 2002): (a) Creencias sobre

educación matemática (temas matemáticos, aprendizaje de la matemática y resolución de problemas, enseñanza de la matemática) (b) Creencias respecto de sí mismo (autoeficacia, valor de las tareas, orientación de las metas) (c) Creencias respecto del contexto social (normas sociales and socio-matemáticas en el aula). Una creencia del individuo se entiende en un sentido bastante amplio como, el conocimiento basado en la experiencia subjetiva (cerca de Lester, Garofalo y Kroll, 1989). Sistema de Creencias se utiliza como metáfora para representar cómo se estructuran las creencias del individuo. La dimensión afectiva de las creencias influyen en el papel y el significado de cada creencia en el sistema de creencias del individuo. Sobre dicha definición y caracterización hemos basado este trabajo, y desarrollando la búsqueda bibliográfica en torno a responder o, ¿qué sabemos acerca de cómo este cambio los sistemas de creencias, si lo hace?

Intervención. Resolución de problemas de final abierto

La experiencia que se llevó a cabo con un grupo de profesores de educación básica que hacían clases en 3º año básico y que trabajaron durante 3 años consecutivos (2011 ? 2013) con el mismo grupo de estudiantes (3º, 4º y 5º básico). El trabajo consistía en desarrollar una clase de resolución de problemas de final abierto una vez al mes, teniendo como objetivo el desarrollo de competencias y no la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático particular.

Entrevistas con uso de viñetas.

El estudio propuesto es de carácter descriptivo, para lo cual nos planteamos el uso de diversas técnicas de recolección de datos que nos permitan caracterizar el cambio de los profesores a partir de la experiencia desarrollada con ellos. Consecuentemente para acceder al cambio del profesor desde su perspectiva utilizamos entrevistas en profundidad basadas en el uso viñetas (Sanchez y Dominguez, 2008).

Cambios declarados por los profesores

Fue posible caracterizar los cambios declarados por los profesores considerando la caracterización enunciada anteriormente: Creencias sobre educación matemática: referida a la definición de lo que es un problema en aula y su resolución. El tipo de problemas que utilizarían para desarrollar una clase de resolución de problema y elementos que componen una clase de RP. Creencias respecto de sí mismo: referida a la capacidad de gestionar el aula incluyendo diversas situaciones en ella. También existe cambio respecto de las expectativas que tienen de sus estudiantes. Creencias respecto del contexto social: dinámica de la clase, aceptar distintos tipos de producciones de los estudiantes.

Comentarios finales

Es destacable, luego del análisis de las entrevistas realizadas, que ha sido posible distinguir creencias referidas a la RP que, después de una intervención en las aulas a lo largo de tres años, han variado y otras que no. Existe un elemento altamente destacable y que tiene que ver con la dirección de los cambios deseables que describimos al comienzo, y es que los profesores manifiestan que han aprendido a dar espacio a los estudiantes, que ellos han aprendido a "cerrar la boca" y escuchar. Por otra parte existe una serie de elementos que se mantienen invariantes, entre éstos destacamos: (a) relacionar la resolución de problemas con un contenido matemático determinado (b) posicionar la RP al finalizar un tema y (c) considerar la RP como una forma de aplicar lo aprendido, no como una competencia a desarrollar. Incorporan la resolución de problemas de final abierto, pero no renuncian al trabajo guiado, luego se incorpora como otro tipo de RP. El factor que más ligado aparece a éstas invariantes, más que la definición de creencias periféricas y centrales, es el contexto en el que los profesores desarrollan su quehacer y por lo tanto la posibilidad cierta de creer

en un cambio determinado. En segundo lugar no renunciar a la concepción de la RP como un trabajo que puede ser muy guiado, para un tipo de problemas y muy libre para otro tipo de problemas, si guarda relación con las creencias de cómo se construye el conocimiento matemático y respecto de lo que es la matemática, y en este sentido se distingue una creencia central que es más compleja de cambiar porque está arraigada en el sistema de creencias. Finalmente, destacamos la complejidad del trabajo en torno a determinar los factores que favorecen el cambio en los profesores y la necesidad de continuar la tarea en torno a desarrollar herramientas metodológicas que nos permitan indagar en el mismo, de esta manera también tendremos información empírica y relevante que permite tanto evaluar como diseñar los planes de formación e intervención en un sentido correcto.

Lester, F.K., Garofalo, J. and Kroll, D.L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: key influences on problem solving behavior. In D.B. McLeod and V.M. Adams (Eds.), *Affects and mathematical problem solving* (pp. 75-88). New York: Springer-Verlang.

OECD, (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. USA: OECD Publishing.

Op't Eynde, P., De Corte, E. and Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs: a quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. Leder, E. Pehkonen and G. Törner (Eds.), *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?* (pp. 13-37). Dordrecht: Kluwer.

Sánchez, A. y Domínguez, A. (2008). Elaboración de un instrumento de viñetas para evaluar el desempeño docente. *Revistas Mexicana de Investigación Educativa*, 37, 625-648.

Wilson, M. y Cooney, T. (2003). Mathematics teacher change and developments. The role of beliefs. En Leder, G., Pehkonen, E. y Törner, G. (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*. (pp. 127-147). *Mathematics Education Library*, V(31).

## Una columna de opinión matemática

*Andrés Navas*

### Abstract

Explicaré el origen y desarrollo en sus tres meses iniciales de mi blog matemático en el espacio ‘Columnas de Opinión’ del diario electrónico El Mostrador.

Hace unos meses surgió la idea de publicar artículos cortos de divulgación matemática en un medio masivo. Los objetivos de este proyecto son:

- llegar rápidamente al mayor número posible de lectores de cierto nivel cultural;
- traspasar ideas matemáticas profundas y de actualidad pero de manera amena, de modo de conectar al lector con su realidad cercana.

Para tal efecto se contactó al diario El Mostrador, cuyo comité aceptó rápidamente la idea: ver <http://www.elmostrador.cl/autor/anavas/>. Siendo un medio que se viraliza con velocidad en redes sociales, esta elección ha permitido lograr el primer objetivo arriba con singular éxito. En cuanto al segundo objetivo, éste se logra estructurando cada artículo en un modelo que obedece ciertos patrones:

- se publican artículos cortos (no más de 7 párrafos);
- no se utiliza fórmulas matemáticas ni terminología técnica;
- se intenta ejemplificar conceptos, ideas o resultados con alusiones a la realidad nacional;
- cada artículo se ameniza usando recursos estilísticos (se escriben en forma de “historias”), sin dejar de establecer lazos con potenciales lectores de intereses diversos (literatura, deporte -fútbol-, género, cultura en general).

Durante la charla haré una revisión de la primera etapa del proyecto exhibiendo estadísticas, planteando conclusiones primeras y formulando aspectos a mejorar/replicar.

## References

<http://www.elmostrador.cl/autor/anavas/>

# Implementing a Teaching Engineering from concept Limit your Epistemology Topological a Freshman Engineering in Chile UCSC

*Eduardo Orellana R.*

## Abstract

The present work is inserted into previous research inquiry comparison made between the historical evolution of epistemological limit concept and curriculum for first year engineering at UCSC and UNICIT Chile filed SOMACHI, Olmué 2013 and aims describe and analyze progress in learning the limit concept of these students presented since its epistemology and its use in the subsequent application of a didactic engineering. The proposal allows us to describe and analyze the main variables that are necessary for the construction of the limit concept and its integration into the curriculum. In this paper the conclusions we get from doing such application to determine mathematical concepts and processes developed by engineering students at UCSC are presented. The work uses tools of qualitative and quantitative methodology that allows us to describe the main errors and difficulties that freshmen engineering have in relation to these concepts and mathematical processes in the construction of a threshold. The results will be used to perform various proposals from the epistemology of the concept to improve the curriculum relevant and can be used in the classroom for higher learning the limit concept.

## References

- [1] B. CORNU, *Apprentissage of the notion limite: modèles spontanés et modèles propres. Proceedings PME-V. Grenoble*, París, 1991.
- [2] M. GUZMÁN, *The origin and evolution of mathematical theories. Implications for mathematical education. Selected lectures from the 7th international congress on mathematical education*, Toronto, 1992.
- [3] A. SIERPINSKA, *Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics*, Poland, 1987.

---

Universidad Católica de la Santísima Concepción.

Partially supported by Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería UCSC., e-mail: eorellana@ucsc.cl

- [4] L. TRISTÁN, *Análisis Matemático*, Ed. Universidad de Valladolid, Valladolid, España, 2014
- [5] G. YOUNG, *Topología*, Reverté, Madrid, España, 1996

# Un modelo para caracterizar y desarrollar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores

*Luis R. Pino-Fan*

## Abstract

El conocimiento del profesor de matemáticas ha sido ampliamente estudiado y recientemente se ha logrado un notable avance con la propuesta del “Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)”, y de otros modelos para la determinación del complejo de conocimientos que un profesor debería tener para gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus estudiantes. Sin embargo, a pesar de los avances que dichos modelos suponen, aún quedan cuestiones por responder, por ejemplo, ¿Cómo o bajo qué criterios puede ser evaluado el MKT? ¿Cómo se relacionan los distintos componentes del MKT? En este trabajo se presentan algunos avances respecto de las respuestas a dichas preguntas.

Desde hace aproximadamente tres décadas, una de las problemáticas que más ha interesado tanto a la comunidad de investigadores en matemática educativa como a las administraciones educativas, es determinar y caracterizar los componentes del complejo de conocimientos que un profesor de matemáticas debería tener para llevar a cabo eficazmente su práctica docente y facilitar el aprendizaje de sus alumnos sobre tópicos específicos de matemáticas. Al respecto, una gran cantidad de investigaciones han sido orientadas a la identificación de dichos componentes del conocimiento de los profesores. Por ejemplo, los trabajos de Shulman (1986) y Ball y colaboradores (Ball, 2000; Hill, Ball y Schilling, 2008), nos muestran una visión multifacética sobre la identificación de los conocimientos requeridos para la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones más recientes evidencian que no existe un acuerdo universal sobre un marco teórico para describir el conocimiento de los profesores de matemáticas (Rowland y Ruthven, 2011).

En la actualidad, una de las propuestas sobre el conocimiento de los profesores que ha tenido mayor impacto, es la denominada “Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)”, desarrollada por Ball y colaboradores (Hill, et al., 2008), la cual supone avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que debe tener un profesor para enseñar matemáticas. Sin embargo, a pesar de los avances que supone dicho modelo, aún quedan cuestiones fundamentales por responder, por ejemplo, ¿cómo determinar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores con modelos que incluyen categorías demasiado globales? Concretamente, ¿de qué forma o bajo qué criterios se puede evaluar o medir el MKT?



En palabras de Silverman y Thompson (2008) “Aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que sea, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores” (p. 499). En general, como señala Godino (2009), tanto el modelo MKT de Ball como los diversos modelos propuestos desde el campo de investigación en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales y disjuntas, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas.

En esta comunicación presentamos un modelo para caracterizar y desarrollar el conocimiento de los profesores de matemáticas, denominado modelo del *Conocimiento Didáctico-Matemático* (CDM). Este modelo ha sido propuesto considerando tanto los aportes y avances de los diversos modelos planteados al seno de la comunidad internacional de investigación sobre Didáctica de la Matemática, como los resultados obtenidos de nuestros diversos estudios empíricos (e.g., Pino-Fan, 2014; Pino-Fan, Godino y Font, 2015), que hemos desarrollado respecto del tema, verificando así, la utilidad de las herramientas teórico-metodológicas propuestas por el *CDM*.

## References

- [1] D. L. Ball: *Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach*, Journal of Teacher Education, 51, 241–247, 2000.
- [2] J. D. Godino: *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas*, Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13–31, 2009.
- [3] J. D. Godino, C. Batanero, V. Font: *The ontosemiotic approach to research in mathematics education*, ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1), 127–135, 2007.
- [4] H. C. Hill, D. L. Ball, S. G. Schilling: *Unpacking pedagogical content knowledge of students*, Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372–400, 2008.
- [5] T. Rowland, K. Ruthven: *Mathematical knowledge in teaching. Mathematics Education Library 50*, Springer, 2011.
- [6] L. S. Shulman: *Those who understand: Knowledge growth in teaching*, Educational Researcher, 15(2), 4–14, 1986.
- [7] J. Silverman, P. W. Thompson: *Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching*, Journal of Mathematics Teacher Education, 11(6), 499–511, 2008.
- [8] L. Pino-Fan: *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*, Universidad de Granada, 2014.
- [9] L. Pino-Fan, J. D. Godino, V. Font: *Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas*, BOLEMA, (En prensa), 2015.

# Ciudadanía Crítica y Aprendizaje de la Matemática. Una mirada desde las nociones construídas por los estudiantes de Enseñanza Media

*Victor Parra G, Rodrigo Panes Ch*

## Abstract

Se exponen los resultados preliminares de una investigación en curso, cuyos objetivos apuntan a analizar los significados atribuidos a la noción de ciudadanía a través aprendizaje de la matemática, junto con diseñar e implementar una propuesta didáctica que posibilite el desarrollo de habilidades para la formación de ciudadanos críticos en estudiantes de 4º medio del Colegio Olivar College. Se adoptó un enfoque mixto de investigación, a través de un estudio de caso único. La recolección de información, se basó en la aplicación de un cuestionario cerrado de carácter censal al grupo curso, entrevistas semiestructuradas en profundidad a 6 estudiantes y análisis documental de los trabajos producidos. El análisis cuantitativo se realizó para la fase inicial de diagnóstico, a través del programa PSPP y posteriormente a través del levantamiento de categorías bajo el proceso de triangulación hermenéutica. El diseño e implementación de la propuesta didáctica se basó teniendo en cuenta los planteamientos teóricos de la educación matemática crítica. Los resultados dan cuenta de nociones que los estudiantes poseen sobre la relación entre ciudadanía crítica y aprendizaje de la matemática, observándose la ausencia de una relación clara entre dichos ámbitos.

Los últimos años en el ámbito chileno, principalmente el 2006 y el 2011, numerosas movilizaciones sociales han puesto en cuestión los pilares no solo institucionales, sino políticos e ideológicos del sistema educacional chileno. En este escenario el rol de los estudiantes dentro del proceso educativo se ha venido reconfigurando, transformándose desde un actor receptor a un sujeto activo en el espacio público (Carrasco, 2008; Cornejo, González, Sánchez y Sobarzo, 2009; OPECH / Centro Alerta, 2011). En este escenario la formación de los estudiantes como ciudadanos críticos y reflexivos constituye más que nunca un desafío central para la escuela en la medida que tras la formación ciudadana se juega el tipo de democracia, de justicia y por tanto de sociedad que se espera construir.

Por otro lado, a nivel del sistema escolar chileno el debate de la formación ciudadana ha constituido una problemática marginal, a pesar de los intentos realizados por darle presencia, siendo una de las apuestas más serias las propuestas desarrolladas por el MINEDUC en el

marco de la “Comisión sobre Formación Ciudadana” cuya finalidad explícita era “proponer una visión fundada de los nuevos requerimientos de la ciudadanía democrática, así como criterios y medidas de mejoramiento de la formación ciudadana en la experiencia escolar” (Mineduc, 2004:10). Dicha iniciativa ha quedado reducida principalmente a lo que expresa hoy el Marco Curricular específicamente en los Objetivos Fundamentales Transversales donde se establecen en el ámbito “La Persona y su entorno” como objetivo el “mejoramiento de la interacción personal, familiar, laboral, social y cívica, contextos en los que deben regir valores de respeto mutuo, ciudadanía activa, identidad nacional y convivencia democrática” (Mineduc, 2009:25). Otra iniciativa más reciente es la “Estrategia pedagógica de Fortalecimiento de la Formación Ciudadana” que se plantea el “aprendizaje de los/as estudiantes, incorporando las competencias necesarias para cooperar con una sociedad plural, respetuosa, motivada y con valores éticos, entre otros componentes sociales” (Mineduc, 2013: 2).

Una de las preguntas centrales que intenta responder esta investigación es el rol de la matemática escolar en la tarea de la formación ciudadana. Desde el enfoque sociopolítico de la Educación Matemática se brinda un marco de referencia donde la formación ciudadana apunta a desarrollar habilidades matemáticas, tecnológicas y reflexivas para analizar situaciones sociales de racismo, género, equidad y justicia social en general, permitiendo a los estudiantes proponer y actuar ante ellas (Blanco, 2012:60), al tiempo que permite afrontar lo que Skovsmose y Valero (2007) han caracterizado como dos paradojas de la sociedad de la información, refiriéndose la paradoja de la inclusión y de la ciudadanía que permiten nuclear la discusión entre educación matemática, justicia social, equidad y democracia.

En esta línea la comunicación muestra los resultados y conclusiones preliminares en base a la aplicación de un cuestionario cerrado con escala tipo Likert sobre las categorías de Ciudadanía y Ciudadanía y aprendizaje de la matemática, específicamente sobre los ítems referidos a “Noción de ciudadanía crítica y aprendizaje de la matemática” y “Concepciones sobre la actividad matemática”.

## References

- [1] Blanco, H.(2012): *Estudio de las Actitudes Hacia una Postura Sociocultural y Política de la Educación Matemática en Maestros en Formación Inicial* , REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education, 1(1), 57-68.
- [2] Callejo, M y Goñi, J. (Coords): *Educación matemática y ciudadanía*, GRAO, 2010.
- [3] Callejo, M.: *Cuadernos de Sociedad y Educación. Educación Matemática y Ciudadanía: Propuestas desde los Derechos Humanos*,12,2000.
- [4] Skovsmose, O. Valero, P.(2007): *Educación matemáticas y justicia social: hacerle frente a las paradojas de la sociedad de la información*, Gimenez, J. Díez-Palomar, J. Civil, M. (Coords), Educación matemática y exclusión, 45-61, Madrid: Grao.

# Construcciones Mentales para el uso de conceptos básicos del Álgebra Lineal

*Marcela Parraguez González, Raúl Jiménez Alarcón*

## Abstract

En el marco del proyecto FONDECYT N° 1140801 titulado: CONSTRUCCIONES y MECANISMOS MENTALES PARA EL USO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL se propuso investigar desde una postura cognitiva el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos básicos del Álgebra lineal, en estudiantes universitarios; utilizando como marco teórico la TEORÍA APOE (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores. En esta primera fase de la investigación reportamos cómo los estudiantes universitarios hacen evolucionar su esquema de tres conceptos básicos del Álgebra Lineal (espacio vectorial, combinación lineal y transformación lineal) a través de su uso.

Las descomposiciones genéticas que se han diseñado para tres conceptos básicos del Álgebra Lineal, espacio vectorial (Parraguez and Oktaç, 2012), combinación lineal (Parraguez and Uzuriaga, 2014) y Transformación lineal (Maturana and Parraguez, 2014), han seguido la metodología que nos provee la teoría APOE, poniendo de relieve las construcciones mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y mecanismos mentales (Interiorización Coordinación, Encapsulación, Desencapsulación y Asimilación) que los estudiantes ponen en práctica en la (re)construcción que hacen de estos tres conceptos básicos del AL. Los resultados que se derivan de estas tres últimas investigaciones, están relacionados, por un lado con el rol que juega la generalización de vector nulo en la evolución del esquema espacio vectorial (Parraguez and Oktaç, 2012), y por otro lado la posibilidad que los estudiantes trabajen los espacios vectoriales con operaciones diferentes a las usuales; contribuyendo ambos a consolidar la coherencia del esquema espacio vectorial, mostrada a través de los conceptos y propiedades relacionadas con el espacio vectorial (Parraguez, 2013).

## References

- [1] Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. : *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, Springer, 2014.

---

marcela.parraguez@ucv, rjimenez@ucn.cl

El trabajo es financiado por el Proyecto FONDECYT No. 1140801.

- [2] Maturana, I. , Parraguez, M. , *Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal*, En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27, Escribir 771–778, 2014 .
- [3] Parraguez, M. , Uzuriaga, V. , *Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores.*, Revista Scientia et Technica Año XIX, 19(3), Escribir 329–334, 2014 .
- [4] Parraguez, M. , *El rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial.*, Educación Matemática, 25(1), Escribir 133–154, 2012 .
- [5] Parraguez, M. , Oktaç, A., *Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial.*, Revista del Centro de Investigaciones Educativas PARADIGMA, 33(1), Escribir 163–192, 2012 .

# Creencias acerca de la matemática y su aprendizaje en estudiantes de 2º básico

*Josefa Perdomo-Díaz*

## Abstract

En los últimos años ha habido un aumento considerable del interés por analizar las distintas componentes del dominio afectivo en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en los distintos niveles educativos. El estudio de este dominio es particularmente complejo por su naturaleza. El trabajo que se presentará permitirá discutir acerca de estas dificultades a partir de un ejemplo: el análisis de las creencias de un grupo de estudiantes de 2º básico acerca de la matemática y su aprendizaje. Se trata de un análisis exploratorio, utilizando elementos de estadística descriptiva, de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario diseñado en el contexto de un proyecto conjunto entre Chile y Finlandia (AKA 09). Este estudio se hace en el contexto de un proyecto más amplio cuyo objetivo es analizar las emociones que experimentan los estudiantes en cada uno de los niveles escolares (desde kinder hasta 4 medio) cuando realizan actividades de geometría de distinto tipo (conocimiento, aplicación y razonamiento) y explorar su relación con otros factores de tipo individual (creencias y conocimientos) y contextual (creencias de sus profesores y características de las clases de matemáticas en las que participan).

## References

- [1] V.A.DeBellis, G.A. Goldin, *Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective.*, Educational Studies in Mathematics, vol 63, pp. 131-147, 2006 .
- [2] A. Efklides, S. Volet, *Feelings and emotions in the learning process*, Learning and Instruction, vol 15.5, pp. 377-380, 2005.
- [3] M. Hannula, *Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories* , Research in Mathematics Education, vol. 14(2), pp. 137-161. 2012.
- [4] G. Mandler, *Affect and Learning: Causes and Consequences of Emotional Interactions*, En D. B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*, pp. 3-19, Ed. Springer-Verlag, New York. 1989.

---

mailto: jperdomo@dim.uchile.cl

El trabajo es financiado por el Proyecto Fondecyt 3140597.

- [5] D.B. McLeod, *Affective issues in mathematical problem solving: some theoretical considerations*, Journal for Research in Mathematics Education, vol 19(2), pp. 134-141. 1988.
- [6] TIMSS: *Marcos de la evaluación*, Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, 2011.

# Tratamiento de la contingencia en el aula de matemáticas

*Horacio Solar*

## Abstract

A partir de las dimensiones del Knowledge Quartet descritos por Rowland, nuestro foco está puesto en la contingencia, es decir en aquellas situaciones que no son planificadas por el profesorado, estas contingencias pueden ser desencadenadas por varios aspectos. En esta comunicación presentaremos uno de los casos de contingencia asociado a las ideas del profesor y de qué manera el profesor gestiona dichas contingencias por medio de estrategias comunicativas.

El foco de esta ponencia está puesto en la Contingencia, es decir en aquellas situaciones que no son planificadas por el profesorado. Rowland et al., (2011) han identificado tres desencadenantes de la contingencia: ideas de los alumnos, ideas del profesor, y uso de herramientas. Una manera de estudiar la gestión del aula en situaciones de contingencia, es por medio de las estrategias comunicativas. Varios autores han puesto el foco en la importancia de espacio de comunicación y discusión en el aula de matemáticas (Chapin, O'Connor, and Anderson, 2009), dichos autores han estudiado movimientos discursivos del profesor, y el tipo de preguntas para una discusión efectiva en el aula de matemáticas. En particular tenemos especial interés en las acciones docentes para promover una comunicación en el aula, a lo que hemos llamado estrategias comunicativas. Para ello nos hemos basado en Lee (2010) quien señala diversas estrategias que puede utilizar el profesor para incluir a todos los estudiantes en el discurso matemático, entre ellas: hacer preguntas y desarrollar actividades que todos los alumnos consideren que merecen reflexión; fijar objetivos que dejen claro que el profesor espera que todo el mundo contribuya; que el profesor se asegure de que todos tengan la oportunidad de aportar algo en un conjunto de temas; asegurar a sus alumnos que las respuestas equivocadas revelan errores que el profesor necesita aclarar. Estas estrategias las hemos recogido en dos grandes dimensiones en relación a: las oportunidades de participación y la gestión del error. Además hemos agregado una tercera dimensión, la cual tiene relación con las buenas preguntas que hace el profesor para guiar el discurso matemático. Ponte et al. (1997) señalan que una de las formas más importantes que tiene el profesor para orientar el discurso en clases es haciendo preguntas a los alumnos, cuestionándolos, y es allí donde el profesor puede detectar dificultades en el nivel de comprensión

---

Pontificia Universidad Católica de Chile, mailto: hsolar@uc.cl

El trabajo es financiado por el Proyecto Fondecyt 11130675 Tratamiento de la contingencia desde el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas.



de los conceptos y de los procesos matemáticos. Las tres estrategias comunicativas señaladas, oportunidades de participación, gestión del error y buenas preguntas, nos han parecido claves para analizar la gestión de aula en situaciones de contingencia. Nuestro propósito es estudiar el tratamiento de la contingencia por parte del profesor analizando de qué manera el profesor gestiona dichas contingencias por medio de las estrategias comunicativas. En el contexto de un proyecto (Fondecyt 11130675) en que se está estudiando las relaciones entre el desarrollo de la argumentación en el aula y el tratamiento de la contingencia, durante el 2014 se ha ido formando a un grupo de 10 profesores en la gestión de la argumentación. y se han ido a observar sus clases de forma paralela en la participación del seminario. El criterio para determinar que en una clase hubo contingencia, es que efectivamente el profesor se desvíe de la planificación de su clase. De todas las ocho clases observadas, hemos encontrado tres clases que cumplieron este criterio. En dos de ellas el desencadenante fue producto de errores de los estudiantes, y en la otra fue producto de las ideas del profesor. Este último caso es muy relevante puesto que la gran mayoría de los casos reportados en la literatura el desencadenante es la idea de los alumnos, por lo que contar con un caso en que el desencadenante de la contingencia es el propio docente, constituye una contribución valiosa para esta línea de investigación. En esta comunicación nos centraremos en presentar este caso. Para analizar la gestión del docente de la contingencia, hemos observado que las estrategias comunicativas que se utilizaron para el desarrollo de la argumentación, también son una buena herramienta de análisis para la contingencia. En particular en los casos que hemos analizado, hemos visto que las tres estrategias que hemos considerado como las más relevantes para promover la argumentación: oportunidades de participación, gestión del error y tipo de preguntas, también son las más relevantes para un tratamiento favorable de la contingencia. Con estos datos hemos obtenido como resultado preliminar que las estrategias comunicativas contribuyen a gestionar las situaciones de contingencia. Más aun, podemos establecer ciertas relaciones entre estas tres estrategias comunicativas: cuando no hay buenas preguntas, no hay verdaderas oportunidades de participación y por tanto no se hace una adecuado gestión del error. Es decir existe una relación inclusiva entre las tres estrategias.

## References

- [1] Chapin, S. H., O'Connor, C, and Anderson, N.C., *Classroom Discussions: Using Math Talk to Help Students Learn*, Math Solutions, 2009.
- [2] Lee, C., *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*, Ediciones Morata, 2010.
- [3] Ponte, J., Boavida, A., Graça, M. y Abrantes, P, *Funcionamiento de la clase de matemáticas* , Didáctica da matemática, pp71–95, Ministerio de Educação, 1997.
- [4] Rowland, T., Thwaites, A. and Jared, L., Triggers of contingency in mathematics teaching. In B. Ubuz (Ed.). Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Education, Vol. 4, pp. 73-80. Ankara, Turkey, PME, 2011.

## Lenguaje y Léxico Matemático

*María del Valle L. y Pedro Salcedo L.*

### Abstract

Esta investigación describe el léxico disponible en una muestra de estudiantes de Enseñanza Media y cómo es posible obtener información sobre él a partir de recursos informáticos que permiten guiar el hacer del profesor para establecer o mejorar, según sea el caso, el léxico de sus estudiantes de matemática. Cuando este léxico es compartido significativamente entre profesor y alumnos aumenta la motivación por aprender ésta disciplina.

¿Qué es el lenguaje?, ¿Por qué el lenguaje está asociado al pensamiento? Siguiendo a Russell (1905) y a Wittgenstein (1923), lenguaje es una forma de expresar nuestras percepciones de la realidad. Russell fue uno de los filósofos que sugirió que el lenguaje tenía un importante rol en como entendemos el mundo señalando que lo más importante en relación al lenguaje es cómo utilizamos el lenguaje, afirmando que la claridad de expresión era una virtud, idea que es particularmente seguida por los que trabajan en la filosofía del lenguaje. Por otra parte, medular en el argumento de Wittgenstein era la creencia de que el lenguaje y el pensamiento contienen una estructura lógica similar que sirve para diferenciar lo que puede ser significativo y claramente expresado (o pensado), y lo que constituyen enunciados sin sentido o carentes de significado. La estructura lógica del lenguaje y el pensamiento también está relacionada con la estructura lógica de la realidad. Los enunciados podrían ser gramaticalmente correctos, y no tener sentido en términos del significado. Wittgenstein quería establecer una conexión entre la lógica del "lenguaje ordinario" y el mundo empírico. Es decir, el lenguaje ordinario consiste en su nivel más básico de "nombres" que corresponden al nivel básico de "objetos" en el mundo. El aprendizaje básico de la matemática lo constituyen los conceptos o los objetos matemáticos, a partir de ellos es que surge un lenguaje simbólico específico que para ser comprendido requiere del lenguaje natural, cotidiano, ese que surge de las proposiciones y está sujeto a reglas y a la lógica. Los profesores debemos desarrollar competencia en este aspecto ya que al romper las reglas establecidas, lo que se dice no corresponde a la realidad, es decir, no corresponde significativamente al objeto. Todas y cada una de las palabras tienen un significado no existiendo sinónimo para ellas, pero algunas palabras del lenguaje tienen doble significado dependiendo del contexto en que se usan y del conocimiento matemático que tenga la persona (Ortega y Ortega, 2001). Por otra parte, los alumnos no suelen oír ni leer demasiado sobre matemática de forma explícita fuera de la clase; normalmente el profesor actúa como intermediario y mediador entre el

alumno y la matemática, en parte mediante la determinación de las pautas de comunicación en clase pero también a modo de hablante nativo de matemática. En consecuencia, algo que aprenden los alumnos, desde el profesor, es el conjunto de formas aceptables de comunicar y exponer la matemática (Pimm, 2002). Hoy se ha asumido por la comunidad científica que los humanos tenemos un diccionario mental, llamado lexicón, compuesto por palabras (léxicos) que aumenta, disminuye y cambia de una forma dinámica, siendo permeado por el contexto que rodea al individuo y por el tiempo que le toca vivir. Para el estudio de la organización de este diccionario mental se han propuesto diversas teorías; de rasgos semánticos, de prototipos, redes semánticas, etc. Siendo posible hoy utilizar modelos matemáticos, como los grafos, para su estudio, desarrollándose herramientas de software para ayudar en esta tarea. La herramienta LexMath.com es una de ellas, desarrollada en el marco de una investigación de los autores de este trabajo y descrita más adelante, hoy permite medir en forma online el lexicón mental de un individuo, determinando automáticamente los índices y representaciones gráficas de las estructuras semánticas (www.lexmath.com, Fondecyt 1120911; Salcedo and del Valle, 2013; Salcedo, Ferreira, Barrientos, 2013) y de generar en forma adaptativa acciones remediales al perfil social y al léxico latente del usuario. Por otro lado hay evidencia de que los alumnos no tienen un léxico disponible adecuado, evidenciándose deficiencias en el léxico y sus estructuras semánticas que evitan avanzar en forma óptima en la adquisición del conocimiento (Salcedo and del Valle, 2013). En la investigación mencionada, entre los hallazgos que cabe destacar se tiene: a) es posible generar tecnologías que nos permiten aplicar un test de disponibilidad léxica, para encontrar el lexicón mental de un grupo determinado, en poco tiempo, en forma online y a costos mínimos. Permitiendo así estudiar las estructuras semánticas que se forman en este y determinar acciones didácticas remediales que subsanen la deficiencia encontrada en algunos casos; b) se ha confirmado que el léxico de los alumnos es contextual, aún en temas específicos como las matemáticas, permitiendo desarrollar tecnologías adaptativas al contexto, y así trabajar en informática sobre la Web Semántica (Web 3.0 ? la Web Inteligente); c) existe una considerable diferencia en el léxico y estructuras semánticas de alumnos de distintas dependencias educacionales, por niveles y características psicosociales.

Ortega J.F. y Ortega J.A. (2001) Matemáticas: ¿un problema de lenguaje? En: <http://uv.es/asefuma/jornadas/laspalmas/DoCo06.pdf>

Pimm D. (2002) El lenguaje matemático en el aula. 3ª Ed. Madrid: Morata.

Russel B. (1905) Sobre la denotación. Ensayo. En: Rvta. Mind. University College: Londres.

Salcedo, P.; del Valle, M. (2013). ¿Disponibilidad Léxica Matemática en Estudiantes de En.Media de Concepción, Chile?. Revista Científico Pedagógica "Atenas", 21, Vol 4, 16.

Salcedo, P.; Ferreira, A. ; Barrientos, F. (2013). ¿A Bayesian model for lexical availability of Chilean High School students in Mathematics?. Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Vol. Natural and Artificial Models in Computation and Biology, Vol. 7930 (I), 245-253.

Wittgenstein (1923) Tractacus logico-philosophicus. Londres: Kegan-Paul

## Alfabetización Numérica: Habilidad para decodificar problemas asociados a medidas de tendencia central en estudiantes en formación inicial docente

*Francisco Rodríguez Alveal, Pedro Sandoval Rubilar, Ana Carolina Maldonado Fuentes*

El término de alfabetización estadística que es introducido por Gal (2002) posee dos componentes interrelacionados, el primero de ellos se relaciona con la habilidad de interpretar y evaluar críticamente la información apoyada en datos o fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos; el segundo de ellos se relaciona con la habilidad para comunicar y argumentar sus opiniones respecto a la información estadística interpretada.

Dicha alfabetización resulta relevante actualmente, toda vez, que estamos inmersos en un mundo cada día más globalizado donde la estadística juega un rol fundamental en la vida de los ciudadanos, producto de ello se ha incorporado de manera generalizada en el currículo educacional internacional y nacional (Rodríguez y Sandoval 2012).

En este contexto, específicamente, el desarrollo de una alfabetización en torno a las medidas de resumen numéricas, son claves para comprender la información del mundo contemporáneo, ya que ellas permiten resumir información que se quiere comunicar. Para ello, los sujetos deben tener el conocimiento y la habilidad para la aplicación de operaciones aritméticas, las que según Behar y Ojeda (2000), deberían comenzar a desarrollarse en los niveles básicos del sistema escolar hasta fortalecerlos en la universidad.

Por lo anteriormente expuesto, resulta de interés conocer si los futuros profesores dominan la estadística en general y, específicamente, las medidas de tendencia central o de resumen de información mediante representaciones numéricas, atendiendo a que uno de los objetivos que persigue el MINEDUC es la alfabetización estadística de la ciudadanía. Producto de lo anterior se realizó una evaluación de tipo descriptiva y comparativa y de corte transversal, realizada en 71 estudiantes de Pedagogía en Educación Matemática pertenecientes a dos universidades del país. Aplicándole un instrumento validado estadísticamente. Para el análisis de la información se utilizaron métodos descriptivos (promedio, desviación estándar y frecuencia porcentual), siendo los principales resultados que los estudiantes FID presentan

---

Universidad del Bío-Bío, mailto:frodriguez@ubiobiocl, frodriguez@ubiobiocl

Investigación Financiada por DIUBB código. 142623 4/R "Desarrollo de habilidades de análisis e interpretación de datos de tipo descriptivo en estudiantes de formación inicial docente: Un estudio comparativo entre dos instituciones formadoras".

disminuidos porcentajes de logro en relación al cálculo e interpretaciones de las medidas de resumen.

## References

- [1] Alveal, Francisco Rodríguez, & Rubilar, Pedro Rodrigo Sandoval: *Habilidades de codificación y decodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de Pedagogía en enseñanza Básica*, Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas), 17(1), 207-235, 2012.
- [2] Behar, R. Ojeda M: *El proceso de aprendizaje de la estadística: ¿Qué puede estar fallando?* o, Heurística, 10, 26-43, 2000.
- [3] Gal, I . *Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities*. International Statistical Review, 70(1), 1-25, 2002.
- [4] MINEDUC. *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios para la Educación Media. Decreto Ley n. 220, Santiago de Chile*. 1998.
- [5] Mokros. J. y S.J. Russell , *Children's Concepts of Average and Representativeness*, Journal for Research in Mathematics Education, vol. 26, n.1, pp. 20-39, 1995.
- [6] Strauss, S.; Bichler, E. *The development of children's concepts of the arithmetic average*. Journal for Research in Mathematics Education, v.19, n.1, p. 64-80, 1988

## Alfabetización Estadística: Habilidades para codificar y decodificar representaciones gráficas de profesores en ejercicio y formación inicial docente

*Pedro Sandoval Rubilar, Francisco Rodríguez Alveal, Ana Carolina Maldonado Fuentes*

En la actualidad, la alfabetización se comprende como un concepto plural, procesual y no limitado al Lenguaje oral y escrito, sino a las manifestaciones comunicativas de cualquier índole cultural. Así pues, la "... la alfabetización puede ser pensada como una práctica, es decir como una actividad del sujeto que es significativa y que, además, transforma la realidad" (Rodríguez J 2004, pág 4). En esa línea, Scribner y Cole ya en 1981 sostenían que la alfabetización es "... un conjunto de prácticas socialmente organizadas que hace uso de un sistema de símbolos y de una tecnología para producirlo y diseminarlo. La alfabetización no es simplemente saber cómo leer y escribir un texto determinado sino la aplicación de este conocimiento para propósitos específicos en contextos específicos ..." (Citado por Rodríguez J 2004, pág 4-5). Coherentemente con lo anterior, no ha de extrañar que actualmente la preocupación no sólo esta puesta en la capacidad de graficar códigos comunicativos, sino en la habilidad de representar y comunicar información en un contexto social y cultural específico por parte de los sujetos modernos. Por ello, la comunicación mediante representaciones estadísticas no debe centrarse en como graficarlas (grafemas), sino en la habilidad comunicar códigos propios de la cultura (codificar y decodificar) y su interacción con las formas de utilización concreta por los sujetos (Batanero, C 2001; Coll, C. 2005). Por tanto, el saber estadístico también estaría asociado a los procesos de alfabetización, tal como lo señala UNESCO que la estadística supone "la habilidad de identificar, comprender, interpretar, crear, comunicar y computar, usando materiales impresos y escritos en diversos contextos" (UNESCO 2005 pág. 21). Considerando que existen niveles de alfabetización, la siguiente presentación es parte de un estudio que tiene como interrogante identificar ¿cuál es el grado o nivel de alfabetización estadística (codificar y decodificar información graficada) que poseen los alumnos en Formación Inicial Docente (FID) y Profesores en ejercicio de Educación Básica del sistema escolar, según la clasificación de Curcio, F (1989). Los resultados evidencian que en general, los Profesores en ejercicio y alumnos en FID realizan procesos de decodificación por debajo de lo esperado y, según la clasificación de Curcio, se ubicarían en el nivel uno

---

Universidad del Bío-Bío, psandoval@ubiobio.cl

Trabajo Financiado por la Universidad del Bío-Bío, Grupo de Investigación en Educación GIE código GI 130823/EF.

de los cuatro postulados, es decir presentan habilidades básicas o iniciales asociadas a la descodificación y análisis de los datos.

## References

- [1] Batanero, C.: *Didáctica de la Estadística. P Proyecto BSO2000-1507, DGES, Ministerio de Educación y Ciencia / Grupo de Investigación FQM-126. Consejería de Educación. Junta de Andalucía*, 2001.
- [2] COLL, C: *Lectura y alfabetismo en la sociedad de la información*, Revista sobre la sociedad del conocimiento, 11, pp.1-10, 2005.
- [3] CURCIO, F., R. *Developing graph comprehension*. Reston: N.C.T.M, 1989.
- [4] MINEDUC. *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios para la Educación Media. Decreto Ley n. 220, Santiago de Chile*. 1998.
- [5] Rodríguez, J : *Las alfabetizaciones digitales*, Bordón, Revista de Pedagogía, 56 (3-4), pp. 431-441., 2004.
- [6] Waine, H. : *Understanding graphs and tables*. Educational Researcher, Washington, DC, v. 21, p. 14- 23, 1992.

# Ecuaciones Diferenciales Parciales



## On a nonlinear thermoelastic system with variable coefficients

*H. R. Clark and R. R. Guardia*

This paper deals with the global existence and uniqueness of solutions, and uniform stabilization of the energy for a nonlinear thermoelastic system.

Suppose that  $\Omega$  is a bounded and open set in  $\mathbb{R}^n$  having a smooth boundary  $\Gamma$  and lying at one side of  $\Gamma$ . Let  $Q = \Omega \times (0, \infty)$  and  $\Sigma = \Omega \times (0, \infty)$  its lateral boundary.

The motivations significant to this article are contained in Chipot-Lovar [1] and Límaco et al [2]. In some oscillatory phenomena is important to consider the thermal effects caused by temperature across the material. This, yields the thermoelastic systems. One of the first nonlinear model (with nonlinearity non local) bringing together the displacement and the heating effect is due to Slemrold in [3]. Following the idea delivered in [3] we (derive and) consider an initial-boundary value problem associated with the nonlinear coupled system. Namely

$$\begin{aligned} u'' - \alpha(\cdot, \cdot, |\nabla u|^2) \Delta u + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \theta &= 0 && \text{in } Q, \\ \theta' + B(\cdot) \theta + (\mathbf{a} \cdot \nabla) u' &= 0 && \text{in } Q, \\ u = \theta = 0 &&& \text{on } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) &&& \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

where all objects in (1) are usual,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  is a constant vector of  $\mathbb{R}^n$  and the operator  $B$  is given by

$$B(t)\theta = \sum_{i,j=1}^n B_{ij}(\theta(\cdot, t), t) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{with } B_{ij} : L^1(\Omega) \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}.$$

The existence of global solutions for the mixed problem (1) is established imposing some restrictions on the initial data  $u_0$ ,  $u_1$  and  $\theta_0$ . Moreover, we also assume the following

hypotheses on  $\alpha$  and  $B_{ij}$  :

$\alpha(x, t, \lambda)$  is a real valued functions belongs to  $C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  ;  
 $0 < \alpha_0 \leq \alpha(x, t, \lambda) \leq C_0 f(\lambda)$ ;  $\alpha(x, t, \lambda) = \alpha_1(x, t) + \alpha_2(x, t, \lambda)$ ;  
 $\partial_t \alpha_1 < C_1 \leq 0$ ,  $|\partial_t \alpha_2|_{\mathbb{R}} \leq C_2 g(\lambda)$ ,  $|\partial_\lambda \alpha|_{\mathbb{R}} \leq C_3 h(\lambda)$ ,  $C_i$  constant for  $i = 1, 2, 3$ ;  
 $f, g, h \in C^1([0, \infty[; \mathbb{R}_+)$  are strictly increasing and  $g(0) = 0$ ;  
 Exists a constant  $K > 0$  such that

$$\sum_{i,j=1}^n B_{ij}(z, t) \xi_i \xi_j \geq K |\xi|_{\mathbb{R}^n}^2 \text{ for all } (z, t) \in L^1(\Omega) \times (0, T) \text{ and all } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A global strong solution of the initial boundary value problem (1) is a pair of functions  $\{u, \theta\}$  defined on  $\Omega \times [0, \infty)$  with real values, such that

$$u, \theta \in L_{loc}^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad u' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad u'', \theta' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)),$$

and  $u, \theta$  satisfies (1) a. e. in  $Q$ .

Now we define the following positive real constant

$$K_0 = \frac{1}{2} [\|u_1\|^2 + \|\theta_0\|^2 + C_0 f(\|u_0\|^2)] |\Delta u_0|^2.$$

The main results of this paper, are:

**Theorem 1.** Suppose  $u_0, \theta_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ,  $u_1 \in H_0^1(\Omega)$  and

$$C \left[ g\left(\frac{2K_0}{\lambda_1 \alpha_0}\right) + h\left(\frac{2K_0}{\lambda_1 \alpha_0}\right) K_0 \right] < -\frac{C_1}{2},$$

where  $C$  is a positive real constant. Then there exists at least a global strong solution of system (1), provided the hypotheses above hold. Moreover, if  $\ell$  is a real-valued continuous and increasing function defined on  $[0, \infty)$  such that  $|\nabla \alpha(x, t, \lambda)|_{\mathbb{R}} \leq C \ell(\lambda)$ , the solution of problem (1) is unique.

**Theorem 2.** The energy,  $E(t) = \frac{1}{2} \{ |u'(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + \int_\Omega \alpha(\cdot, t, |\nabla u(t)|^2) |\nabla u(t)|_{\mathbb{R}}^2 dx \}$ , associated with the strong global solutions of system (1) is asymptotically stable as  $t \rightarrow +\infty$ .

## References

- [1] M. Chipot and B. Lovat, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*, Positivity Vol. 3, N. 1, 65-81, (1999).

- [2] J. Límaco, H. R. Clark and L. A. Medeiros, *Vibrations of elastic string with nonhomogeneous material*, J. Math. Anal. Appl. 344, 806-820, (2008).
- [3] M. Slemrod, *Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional nonlinear thermoelasticity*, Arch. Rot. Mech. Anal., 76, 97-133, (1981).

## A uniqueness result for an inverse problem arising in a mass diffusion problem

*A. Coronel y M.A. Rojas-Medar*

In this paper, we prove the local uniqueness of an inverse problem arising in the model for a viscous incompressible fluid with mass diffusion. To be more specific the model is given by

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u}_t + \left( (\rho \mathbf{u} - \lambda \nabla \rho) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - \lambda (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \rho \\ + \nabla p + \lambda^2 \left( \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla \rho \otimes \nabla \rho \right) \right) = \rho \mathbf{F} \quad \text{in } Q_T, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } Q_T, \quad \rho_t - \lambda \Delta \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{in } Q_T, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_T, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Omega, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x) \quad \text{on } \Omega, \\ \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

The inverse problem consists in the external force recover assuming a integral measurements on the boundary:  $\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(t)$  for  $t \in [0, T]$ . We assume that  $\mathbf{F}$  satisfies a the Helmholtz decomposition, i.e.  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = f(t)(\nabla h(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}(\mathbf{x}, t))$ , where  $\mathbf{m}$  is a given functions and  $f$  and  $h$  are unknown functions such that

$$\nabla \cdot (\rho \nabla h) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{m}) \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = h \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \partial \Omega, \quad \int_{\Omega} h(\mathbf{x}, t) dx = 0, \quad t \in [0, T],$$

whit  $\mathbf{n}$  is the outward unit normal vector to  $\partial \Omega$ . We obtain three main results. First, the proof of existence of solutions for the direct problem is based on the results given in [5]. Second, the proof uniqueness of solution for the direct problem is given by introducing and proving a continuous dependence estimates like the results obtained in [6] for non-homogeneous Navier-Stokes equations and recently extended in [4] for a nonhomogeneous asymmetric fluid. Third, the proof of local uniqueness of the inverse problem is given by characterizing the inverse problem solutions using an operator equation of second kind and introducing several a priori estimates. Here, the cornerstone of the proof is the verification of the hypothesis of the Tikhonov fixed point Theorem.

---

GMA, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile, [acoronel@ubiobio.cl](mailto:acoronel@ubiobio.cl), [marko.medar@gmail.com](mailto:marko.medar@gmail.com)

El trabajo es financiado por el Proyecto Fondecyt 1120260 and MTM 2012-32325.

## References

- [1] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, volume 22 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [2] H. Beirão da Veiga, Diffusion on viscous fluids. Existence and asymptotic properties of solutions. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa –Classe di Scienze* 10(1983): 341–355.
- [3] H. Beirão da Veiga. 1996. Long time behaviour of the solutions to the Navier-Stokes equations with diffusion. *Nonlinear Anal.* 27, no. 11 (1996): 1229–1239.
- [4] A. Coronel and M. A. Rojas-Medar, A uniqueness result for an inverse problem to the system modelling nonhomogeneous asymmetric fluids, *Submitted* 2014.
- [5] P. D. Damázio, F. Guillén-González, J. V. Gutiérrez-Santacreu, and M. A. Rojas-Medar, Local and Global Strong Solution by the Semi-Galerkin Method for the Model of Mass Diffusion. *Matemática Contemporânea* 32:63–86, 2006.
- [6] J. Fan and G. Nakamura. Local solvability of an inverse problem to the density-dependent Navier-Stokes equations. *Appl. Anal.*, 87(10-11):1255–1265, 2008.
- [7] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977. *Studies in Mathematics and its Applications*, Vol. 2.
- [8] A. I. Prilepko, Dmitry G. Orlovsky, and Igor A. Vasin. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, volume 231 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2000.

# Analytical construction of the solution of the Riemann Problem for Burgers equation with discontinuous source

A. Coronel , M.A. Rojas-Medar , M. Sepúlveda and A. Tello

This paper is concerned with the explicit construction of the Riemann problem

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = g(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

where the source term and the initial condition are defined as follows

$$g(x) = g_R H(x) + g_L H(-x), \quad u_0(x) = u_R H(x) + u_L H(-x), \quad (g_L, g_R, u_L, u_R) \in \mathbb{R}^4 \quad (3)$$

with  $H$  is the Heviside function defined by  $H(x) = 0$  for  $x \in \mathbb{R}^-$  and  $H(x) = 1$  for  $x \in \mathbb{R}_0^+$ . The analysis of the problem (1)-(3) is motivated by the theory of Radiation Hydrodynamics [1, 3, 6, 7]. The system for modelling the radiation hydrodynamics is given by four partial differential equations which unknowns are the mass density, the velocity, the total energy and the spectral intensity. The coupling of the radiative transport equation and the equations of hydrodynamics is given by the source term for the linear momentum and energy equations. This system is complex. Then, assuming that the velocity of the fluid particles is small with respect to the velocity of the light, a Burger equation with discontinuous source term is obtained. Thus, the construction of analytic entropic solutions for (1)-(3) is required by the mathematical theory of conservation laws, by the physical application by the numerical solutions. The main result of this work is the following theorem:

**Theorem.** *Consider the Riemann Problem (1)-(3) and denote by  $u_i$  for  $i \in \{1, \dots, 43\}$  each of the possible entropic solutions. Then, there exists a partition  $\{\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_{43}\}$  of  $\mathbb{R}^4$  such  $u_i$  is the entropic solution of (1)-(3) if and only if  $(u_L, u_R, g_L, g_R) \in \mathbb{U}_i$ .*

The proof of Theorem 1.1 is developed in sixty Lemmas. First, we apply the characteristics method and introduce a classification of the different types of waves. A systematic discussion of the all possible types of waves at  $t = 0$ , implies the existence of sixty types of solutions.

---

GMA, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile, acoronel@ubiobio.cl, marko.medar@gmail.com

MA and DIM, Universidad de Concepción, Concepción, Chile, mauricio@ing-mat.udec.cl

Doctorado en Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Chile alex-tello21@gmail.com

Then, we analyze in detail the analytic construction of these solution types. Basically, and in a broad sense, a shock or a rarefaction wave are formed at  $t = 0$ . The evolution of shock curve is completely characterized by analyzing the initial value problem obtained by the Rankine-Hugoniot condition. The rarefaction wave solution is explicitly obtained by the characteristics method. Here, a subcase of rarefaction wave, called “vacuum wave”, requires a regularization of the source term and the initial condition before of the application of the characteristics method. Finally, by a unification of the sixty Lemmas we obtain the partition  $\{\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_{43}\}$ .

**Acknowledgment.** Marko Rojas-Medar, Anibal Coronel and Alex Tello acknowledge the support of the research projects 124109 3/R (Universidad del Bío-Bío, Chile), 121909 GI/C (Universidad del Bío-Bío, Chile), Fondecyt 1120260 and MTM 2012-32325 (Spain). Mauricio Sepúlveda thanks for the support of Fondecyt project 1140676, CONICYT project Anillo ACT1118 (ANANUM), Red Doctoral REDOC.CTA, project UCO1202 at Universidad de Concepción, BASAL project CMM, Universidad de Chile, and CI<sup>2</sup>MA, Universidad de Concepción.

## References

- [1] Pomraning G. C. *The Equations of Radiation Hydrodynamics*. Pergamon Press, 1973.
- [2] Constantine M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, volume 325 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2010.
- [3] Beixiang Fang, Pingfan Tang, and Ya-Guang Wang. The Riemann problem of the Burgers equation with a discontinuous source term. *J. Math. Anal. Appl.*, 395(1):307–335, 2012.
- [4] Harald Höller. Strong Conservation Form and Grid Generation in Nonsteady Curvilinear Coordinates. Numerical Methods for Implicit Radiation Hydrodynamics in 2D and 3D. Master’s thesis, Institut für Astronomie, Universität Wien, 2010.
- [5] S. N. Kružkov. First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)*, 81 (123):228–255, 1970.
- [6] Dimitri Mihalas and Barbara Weibel Mihalas. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Oxford University Press, New York, 1984.
- [7] Christian Rohde and Feng Xie. Global existence and blowup phenomenon for a 1D radiation hydrodynamics model problem. *Math. Methods Appl. Sci.*, 35(5):564–573, 2012.
- [8] Eleuterio F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction..* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2009.

# An inhomogeneous nonlocal diffusion problem with unbounded steps

*Manuel Elgueta*

This is a joint work with C. Cortazar, J. Garcia-Melian and S. Martinez.  
We consider the following nonlocal equation

$$\int J\left(\frac{x-y}{g(y)}\right) \frac{u(y)}{g(y)} dy - u(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R},$$

where  $J$  is an even, compactly supported, Hölder continuous kernel with unit integral and  $g$  is a continuous positive function. Our main concern will be with unbounded functions  $g$ , contrary to previous works. More precisely, we study the influence of the growth of  $g$  at infinity on the integrability of positive solutions of this equation, therefore determining the asymptotic behavior as  $t \rightarrow +\infty$  of the solutions to the associated evolution problem in terms of the growth of  $g$ .



# Existencia de soluciones para problemas elípticos ligeramente supercríticos

*Jorge García-Melián, Leonelo Iturriaga, Humberto Ramos Quoirin*

Consideramos el problema semilineal elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde  $a$  es una función continua que puede cambiar de signo y  $f$  es superlineal pero no verifica la condición estándar de Ambrosetti-Rabinowitz. Mostramos que si  $f$  es de variación regular con índice uno en el infinito, existe una solución positiva, suponiendo que  $a$  verifica ciertas condiciones adicionales. Nuestra demostración usa un teorema abstracto de L. Jeanjean sobre puntos críticos de funcionales con estructura de paso de montaña, y se basa en la obtención de cotas a priori para todas las posibles soluciones positivas.

## References

- [1] J. García-Melián, L. Iturriaga, H. Ramos Quoirin: *A priori bounds and existence of solutions for slightly supercritical elliptic problems*, sometido a publicación.

---

Universidad de La Laguna (España), Universidad Técnica Federico Santa María y Universidad de Santiago de Chile, jjgarmel@ull.es, leonelo.iturriaga@usm.cl, humberto.ramos@usach.cl.

El trabajo es financiado por los proyectos MTM2011-27998 (España), Conicyt MEC 80130002, Fondecyt 1120842 y Fondecyt 11121567 (Chile).

# Multiplicidad de soluciones para ciertos problemas elípticos semilineales que involucran no linealidades con ceros

*Jorge García-Melián, Leonelo Iturriaga*

En esta charla consideraremos el siguiente problema elíptico semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $f$  es una función localmente Lipschitz continua, no negativa, con  $r$  ceros positivos,  $\Omega$  es un dominio acotado con borde suave y  $\lambda > 0$  es un parámetro. Mostraremos que bajo cierta condición integral sobre  $f$  cerca de los ceros, para  $\lambda$  suficientemente grande existen al menos  $2r$  soluciones positivas, sin importar el comportamiento de la no linealidad  $f$  en cero o en infinito. La construcción de las soluciones se basan en el método de sub y supersoluciones, argumentos del grado topológico, junto con el uso de un nuevo teorema de Tipo Liouville que es una extensión de los resultados recientes para este tipo de no linealidades.

## References

- [1] S. ALARCÓN, J. GARCÍA-MELIÁN, A. QUAAS, *Optimal Liouville theorems for supersolutions of elliptic equations involving the Laplacian*, submitted for publication.
- [2] S. ALARCÓN, L. ITURRIAGA, A. QUAAS, *Existence and multiplicity results for Pucci's operators involving nonlinearities with zeros*. Calc. Var. Partial Differential Equations **45** (2012), no. 3-4, 443–454.
- [3] S. N. ARMSTRONG, B. SIRAKOV, *Nonexistence of positive supersolutions of elliptic equations via the maximum principle*, Comm. Part. Diff. Eqns. **36** (2011), 2011–2047.
- [4] B. GIDAS, J. SPRUCK, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 525–598.
- [5] B. GIDAS, J. SPRUCK, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **6** (1981), 883–901.

---

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María [leonelo.iturriaga@usm.cl](mailto:leonelo.iturriaga@usm.cl)  
J. G-M was partially supported by Ministerio de Ciencia e Innovación under grant MTM2011-27998 (Spain). J. G-M and L. I. were partially supported by USM Grant No. 121211 and Fondecyt grant 1120842.

- [6] L. ITURRIAGA, S. LORCA, E. MASSA, *Positive solutions for the  $p$ -Laplacian involving critical and supercritical nonlinearities with zeros*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **27** (2010), 763–771.
- [7] L. ITURRIAGA, E. MASSA, J. SÁNCHEZ, P. UBILLA, *Positive solutions of the  $p$ -Laplacian involving a superlinear nonlinearity with zeros*, J. Diff. Eqns. **248** (2010), 309–327.
- [8] P. L. LIONS, *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, SIAM Rev. **24** (4) (1982), 441–467.
- [9] A. QUAAS, B. SIRAKOV, *Existence results for nonproper elliptic equations involving the Pucci's Operator*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 987–1003.

# Un problema elíptico semi lineal con singularidad

*Sebastián Lorca*

Abordaremos un problema del tipo

$$-div(k(T)\nabla T) + u \cdot \nabla T = f(T) + h, \text{ en } \Omega$$

Con condiciones Dirichlet homogéneas

$$T = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

$T(x) \in \mathbb{R}$  denota por ejemplo la temperatura de un fluido en un punto  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$  (dominio acotado),  $h$  representa una fuente calórica y  $k(\cdot) \geq 0$  es la conductividad térmica (función continua que puede depender de la temperatura). La función vectorial  $u(x) \in \mathbb{R}^3$  se supondrá conocida (en general corresponde a la velocidad del fluido). La singularidad viene dada por el hecho de que la función  $k$  puede anularse.

## Power law non newtonian convective alloy solidification in thick walled mold with DBF model and PSIMPLER algorithm

*Nelson O. Moraga and Sebastián U. Ángel*

A moving boundary solidification process of a binary non-Newtonian alloy is described by a novel Darcy-Brikman-Forchheimerporous media model in terms of a coupled system of four PDE's. The problem is solved with an original algorithm, PSIMPLER, by the Finite Volume Method for flows with Rayleigh numbers  $10^3$  and  $10^5$ .

Consider the Boussinesq natural convection and solidification of  $Al - 1.7\%$ . Si along the unsteady heat conduction inside the thick walls of a square mold. Assume the flow in the liquid phase and in the mushy zone can be described by the power law non-Newtonian rheological model, [1]. We propose to incorporate microstructure information into the model by using the Darcy-Brikman-Forchheimer model for the mushy zone assumed to behave as a porous media with temperature dependent porosity  $\varepsilon$  and permeability  $\kappa$ . The governing equations for this novel model are continuity, linear momentum and energy equations:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho u / \varepsilon)}{\partial t} + \left[ u \frac{\partial (\rho u / \varepsilon^2)}{\partial x} + v \frac{\partial (\rho u / \varepsilon^2)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta \partial u}{\varepsilon \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta \partial u}{\varepsilon \partial y} \right) \right] - \left[ \frac{\eta}{K} + \frac{\rho \cdot C}{\sqrt{K}} |\vec{V}| \right] u \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho v / \varepsilon)}{\partial t} + \left[ u \frac{\partial (\rho v / \varepsilon^2)}{\partial x} + v \frac{\partial (\rho v / \varepsilon^2)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \beta (T - T_C) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta \partial v}{\varepsilon \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta \partial v}{\varepsilon \partial y} \right) \right] - \left[ \frac{\eta}{K} + \frac{\rho \cdot C}{\sqrt{K}} |\vec{V}| \right] v \quad (2)$$

$$\left[ 1 + \varepsilon \frac{h_{fs}}{c_p} \cdot \frac{\partial f_{PC}}{\partial T} \right] \cdot \frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial t} + \left( u \frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial x} + v \frac{\partial (\rho c_p T)}{\partial y} \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (3)$$

The apparent viscosity in the mushy zone,  $T_S < T < T_L$ , is calculated as  $\eta = \eta_l / f_{PC}$ , with the liquid fraction  $f_{pc} = (T - T_S) / (T_L - T_S)$ , the porosity  $\varepsilon = f_{pc}$ , permeability  $\kappa = d^2 \varepsilon^2 / 175 (1 - \varepsilon)^2$ . Forchheimer constant  $C = 1.75 / 150^{1/2} \varepsilon^{1/2}$ , the apparent viscosity in the liquid phase as  $\eta_l = \mu \dot{\gamma}^{n-1}$  and the non-Newtonian power law deformation ratio as

$$\dot{\gamma} = \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

Boundary conditions assume no-slip on the internal mold walls and three adiabatic walls. Cooling is by external heat convection on the left vertical wall, with a heat transfer coefficient  $h = 750 \text{ W/m}^2\text{K}$  and ambient temperature  $T_f = 25^\circ\text{C}$ , [2]. The initial conditions consider the alloy is at rest with a uniform temperature  $T_0 = 860^\circ\text{C}$ , while the mold is at  $T_m = 200^\circ\text{C}$ . Solidification is in the interval  $T_L = 650^\circ\text{C}$  and  $T_S = 550^\circ\text{C}$ . The square mold has a length of  $0.0306\text{m}$  with a wall thickness of  $0.0102\text{m}$ . The effect of the Rayleigh number  $Ra$  was investigated for  $Ra = 10^3, 10^4$  and  $10^5$ , for solidification of  $Al - 1.7\%$ . Si inside a graphite mold. The system of four PDE's was solved by using a Fortran in house code built based on the Finite Volume Method. Discrete rectangular non-uniform volumes, with scalars dependent variables calculated at the nodes located at the center of each volume, and vectors (velocity components  $u$  and  $v$ , and heat conduction fluxes) at the volume surfaces. Interpolation functions are linear for the calculation of the diffusion terms and of the fifth power law for the convective terms. A structured staggered grid with  $0.05s$ .

## References

- [1] N.O. Moraga, E.F. Castillo, C.P. Garrido *Non Newtonian annular alloy solidification in mould*. Heat and Mass Transfer. 48, 1415–1424 (2012).
- [2] M. Cruchaga, D. Celentano, *A finite element thermally coupled flow formulation for phase-change problems*. Int. J. Numer. Methods in Fluids. 14, 279–305 (2000).
- [3] N.O. Moraga, S.D.C. Ramírez, M.J. Godoy, P. Ticchione, *Study of convective non-Newtonian alloy solidification in molds by the PSIMPLER/Finite Volume Method*. Numerical Heat Transfer, Part A.12, 936–953, (2010).

# Comportamiento Asintótico para un sistema de ecuaciones de fluido Micropolar

*M. Poblete-Cantellano, P. Marín-Rubio y M. A. Rojas-Medar*

En esta charla trataremos una ecuación de fluido micropolar sobre un dominio acotado con frontera de clase  $C^2$ . Basados en la teoría de Sistemas dinámicos disipativos, demostramos la existencia de un atracciónes globales restringidos para semiflujos locales sobre espacios de fases fraccionales convenientes. Además, demostramos que todos esos atracciónes son en efecto, el mismo conjunto. Previamente, se muestra que el Operador de Lamé es un operador sectorial sobre  $L_p(\Omega)$ ,  $1 < p < +\infty$ .

## References

- [1] A. N. Carvalho, J. W. Cholewa, and T. Dloko, *Examples of global attractors in parabolic problems*, Hokkaido Math. J., 27, 77–103 (1998).
- [2] J. W. Cholewa and T. Dloko, *Global attractor for sectorial evolutionary equation*, J. Differential Equations, 125, 27–39 (1996).
- [3] J. W. Cholewa, T. Dloko, *Local attractor for  $n$ -D Navier-Stokes system*, Hiroshima Math. J., 28, 309–319 (1998).
- [4] X. T Duong,  *$H_\infty$  Functional Calculus of elliptic operators with  $C^\infty$  Coefficients on  $L^p$  spaces of smooth domains*, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 48, 113–123 (1990).
- [5] Y. Giga, *The Stokes operator in  $L_r$  spaces*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 57, 85–89 (1981).
- [6] Y. Giga and T. Miyakawa, *Solutions in  $L_r$  of the Navier-Stokes initial value problem*, Arch. Rational Mech. Anal., 89, 267–281 (1985).
- [7] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative System*, AMS, Providence, R.I., 1988.

---

Universidad de Atacamá (Chile), Universidad de Sevilla (España), Universidad del Bío-Bío (Chile)  
mpoblete@mat.uda.cl, pmr@us.es, marko@ueubionio.cl

M. Poblete-Cantellano fue parcialmente financiado por DIUDA 221169, M.A. Rojas-Medar fue parcialmente financiado por Fondecyt Nro. 1120260, GI/C-UBB 121909 y MTM 2012-32325.

- [8] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 840, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.
- [9] G. Łukaszewicz, *Long time behavior of 2D micropolar fluid flows*, Math. Comput. Modelling, 34, 487–509, (2001).
- [10] G. Łukaszewicz and W. Sadowski, *Uniform attractor for 2D magneto-micropolar fluid flow in some unbounded domains*, Z. Angew. Math. Phys., 55, 247–257 (2004).
- [11] P. Shi and S. Wright,  $W^{s,p}$  Regularity of the displacement problem Lamé system on  $W^{2,s}$  domains, *J. Math. Anal. Appl.*, 239, 291–305 (1999).
- [12] G. R. Sell and Y. You, *Dynamics of Evolutionary Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 143, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [13] A. Tarasińska, *Global attractor for heat convection problem in a micropolar fluid*, Math. Methods Appl. Sci., 29, 1215–1236 (2006).



# Second grade fluid system: a control problem

*Fagner D. Araruna, Luis Friz and Marko A. Rojas-Medar*

We study the control problem for the equations of fluid second second degree. We give necessary conditions for optimality.

## 1 Introduction

In this work we consider the following second grade fluid system

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha \Delta \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \text{curl}(\mathbf{u} - \alpha \Delta \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} + \mathbf{v} & \text{in } \Omega \times ]0, T[, \\ \text{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times ]0, T[, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \partial \Omega \times ]0, T[, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, & \text{in } \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

The first successful mathematical analysis of (3) was done by Cioranescu and Ouazar in [2]. More recently Cioranescu and Girault in [1] establish existence, uniqueness and regularity of a global weak solution of (3) with small data  $\mathbf{f}$  and  $\mathbf{u}(0)$  and the same result on some interval for arbitrary data. The existence is obtained by applying Galerkin's method with a special basis. In [3] is studied the existence of reproductive solution.

In this work, let us introduce the non-empty subset  $\omega \subseteq \Omega$  and a velocity  $\mathbf{u}_1$  defined on  $\omega$  is given . The problem is to find a external force  $\mathbf{v}$  so that the associated velocity  $\mathbf{u}$  minimize the functional

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^T \int_{\omega} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 dx dt. \quad (2)$$

## 2 Mathematical Results

Let  $\Omega$  be a simply-connected bounded domain of  $\mathbb{R}^3$  with boundary  $\partial \Omega$  which is at least of class  $\mathcal{C}^{3,1}$ . In what follows, the spaces in bold face represent spaces of tri-dimensional vector functions. We define the Hilbert spaces  $\mathbf{H}$  and  $\mathbf{V}$  in the following manner:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{ \Psi \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \text{div } \Psi = 0, \Psi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial \Omega \} \\ \mathbf{V} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \text{div } \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{ on } \partial \Omega \} \\ H(\text{curl}; \Omega) &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \text{curl } \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \} \end{aligned}$$

---

Universidad del Bío-Bío, Universidade Federal da Paraíba, Universidad del Bío-Bío marko@ueubiobio.cl, fagner@mat.ufpb.br, lfriz@ubibio.cl.

This work was partially supported by, project MTM2012-32325 Spain, Grants 1120260 and 1130456 Fondecyt-Chile, 125109 3/R UBB and 121909 GI/C-UBB.

For  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , we introduce the space  $\mathbf{V}_2 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \text{curl}(\mathbf{v} - \alpha \Delta \mathbf{v}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$  equipped with the scalar product  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_2} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\text{curl}(\mathbf{u} - \alpha \Delta \mathbf{u}), \text{curl}(\mathbf{v} - \alpha \Delta \mathbf{v}))$  and associated norm and semi-norm  $\|\mathbf{v}\|_{V_2} = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{V_2}^{1/2}$ ,  $|\mathbf{v}|_{V_2} = \|\text{curl}(\mathbf{v} - \alpha \Delta \mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ .

Define

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\mathbf{w} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}_2) : \mathbf{w}' \in L^\infty(0, T; \mathbf{V})\}, \\ W_2 &= L^2(0, T, H(\text{curl}; \Omega)) \cap L^\infty(0, T, \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ W &= W_1 \times W_2. \end{aligned}$$

Now, the set of the admissible controls is given by:

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{v} \in W_2 : \left( \int_0^\infty (\|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\text{curl}(\mathbf{v}(t))\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2) \right)^{1/2} < \delta \right\}.$$

The above condition, given in definition of  $\mathcal{U}$ , is necessary in order to have solution for the system (3) (see [1]). Note that  $W_1$  is a Hilbert space for the norm

$$\|\mathbf{w}\|_{W_1} = \left( \|\mathbf{w}(t)\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{V}_2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{w}'\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{V}(\Omega))}^2 \right)^{1/2}$$

In the same manner,  $W_2$  is a Hilbert space for the norm

$$\|\mathbf{g}\|_{W_2} = \left( \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 + \|\text{curl} \mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \right)^{1/2}$$

Define  $M : W \rightarrow \widetilde{W}$ , by  $M(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\psi_1, \psi_2)$  and  $\widetilde{W} = \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}) \times \mathbf{V}_2$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w} - \alpha A \mathbf{w}) - \nu A \mathbf{w} + P(\text{curl}(\mathbf{w} - \alpha \Delta \mathbf{w}) \times \mathbf{w}) - \mathbf{f} - \mathbf{v} = \psi_1 \\ \mathbf{w}(0) - \mathbf{u}_0 = \psi_2, \end{cases} \quad (3)$$

where  $P : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{V}(\Omega)$  is the orthogonal projection and  $A$  is the Stokes operator.

The optimal control problem is the following: Find  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$  such that

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \inf_{(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathcal{G}} J(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{v}}) \quad (4)$$

where  $\mathcal{G}$  is the non-empty set  $\mathcal{G} = \{(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{v}}) \in W : \tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{U}, M(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{v}}) = 0\}$ .

**Theorem.** Problem (4) has at least one solution. Furthermore, the following minimum principle is satisfied:

$$\int_0^T \int_\Omega (-\xi + \mathbf{v})(\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}) dx dt < 0,$$

for all  $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{U}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ . Here  $\xi$  is solution of the adjoint problem.

## References

- [1] CIORANESCU D. AND GIRAULT V. - *Weak and classical solutions of a family of second grade fluids*, Int. J. Non-Linear Mechanics, 32 (1997), pp. 317-335.
- [2] CIORANESCU D. AND EL HACÈNE O. - *Existence and uniqueness for fluids of second grade*, Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications 109 (1984), 178-197. Collège de France Seminar, Pitman.
- [3] GUILLÉN-GONZÁLEZ, F., FRIZ, L. AND ROJAS-MEDAR, M.A. - *Reproductive solution of a second-grade fluid system*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 879-883.

# Large Solutions for a Class of Semilinear Integro-Differential Equations with Censored Jumps

*Erwin Topp, Julio Rossi*

We study existence of large solutions, that is, solutions that verify  $u(x) \rightarrow +\infty$  as  $x \rightarrow \partial\Omega$ , for equations with the form

$$-\mathcal{I}(u, x) + u(x)^p = 0, \quad x \in \Omega,$$

where  $\Omega$  is a bounded smooth domain in  $\mathbb{R}^N$ ,  $p > 1$  and  $\mathcal{I}$  is an  $x$ -dependent nonlocal operator with the form

$$\mathcal{I}(u, x) = \text{P.V.} \int_{|z| \leq \varrho(x)} [u(x+z) - u(x)] |z|^{-(N+\alpha)} dz,$$

where  $\alpha \in (0, 2)$  and  $\varrho : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  is a function whose main particularity is the censorship of the jumps outside  $\Omega$  through the assumption  $0 < \varrho(x) \leq \text{dist}(x, \partial\Omega)$ . We also obtain uniqueness of the solution in a class of large solutions whose blow-up rate depends on  $p, \alpha$  and the rate at which  $\varrho$  shrinks near the boundary.

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  be a bounded domain with smooth boundary. This paper is concerned with the nonlocal equation

$$-\mathcal{I}(u, x) + u(x)^p = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

where  $p > 1$ ,  $\alpha \in (0, 2)$  and  $\mathcal{I}$  is a nonlocal operator with the form

$$\mathcal{I}(u, x) = \text{P.V.} \int_{|z| \leq \varrho(x)} [u(x+z) - u(x)] |z|^{-(N+\alpha)} dz. \quad (2)$$

The main particularity of  $\varrho : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  is that  $0 < \varrho(x) \leq \text{dist}(x, \partial\Omega)$  for each  $x \in \Omega$ . Operators like (2) are introduced by Ishii and Nakamura in [3] as *regional operators* and can be regarded as an example of the broader family of *censored operators*, see [1]. The main feature of such censored operators is the fact that no information of  $u$  outside  $\Omega$  plays a role in the evaluation of  $\mathcal{I}$ , and therefore we complement (1) with a truly *boundary condition*

---

Universidad de Chile, etopp@dim.uchile.cl, Universidad de Buenos Aires

J.R. was partially supported by MEC MTM2010-18128 and MTM2011-27998 (Spain) and FONDECYT 1110291 International Cooperation. E.T. was partially supported by CONICYT, Grants Capital Humano Avanzado, Realización de Tesis Doctoral and Cotutela en el Extranjero.

instead of a *exterior condition* defined in an open region of  $\Omega^c$ , as it is the case of the fractional Laplacian  $(-\Delta)^{\sigma/2}$  where we must prescribe the value of  $u$  in the whole exterior  $\Omega^c$ .

We focus our attention to *large solutions* to (1), that is, solutions of (1) satisfying the boundary condition

$$u(x) \rightarrow +\infty \quad \text{as } x \rightarrow \partial\Omega, \quad (3)$$

and we do it under different configurations of the function  $\varrho$  in (2). In fact, for  $\Lambda \in (0, 1]$  and  $\sigma \geq 1$ , we consider  $\varrho$  with the form

$$\varrho(x) = \Lambda d^\sigma(x),$$

and we get existence of a minimal, strictly positive large solution to (1) in three main situations, namely

- (i) Linear Censorship:  $\sigma = \Lambda = 1$  and  $p > 1 + \alpha$ .
- (ii) Linear Strict Censorship:  $\sigma = 1, \Lambda < 1$  and  $p > 1$ .
- (iii) Superlinear Censorship:  $1 < \sigma < 2/(2 - \alpha)$  and  $p > 1$ .

Moreover, in these three situations, we are able to provide the following blow-up estimates for this solution

$$\bar{c} d^{-\gamma}(x) \leq u(x) \leq \bar{C} d^{-\gamma}(x), \quad \text{for } x \rightarrow \partial\Omega,$$

for constants  $0 < \bar{c} \leq \bar{C}$  and  $\gamma, \alpha_\sigma$  defined as

$$\gamma = \alpha_\sigma / (p - 1) \quad \text{and} \quad \alpha_\sigma = \sigma(\alpha - 2) + 2.$$

Moreover, we prove this solution is the unique solution in the class of large solutions  $v$  satisfying the boundary blow-up rate

$$0 < \liminf_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega} v(x) d^{-\gamma}(x) \leq \limsup_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega} v(x) d^{-\gamma}(x) < +\infty,$$

similarly to what happens in noncensored fractional problems, see [2] and references therein. It is remarkable that in our case the rate at which  $\varrho$  shrinks near  $\partial\Omega$  plays a role in the blow-up rate of the solution.

## References

- [1] Bogdan, K., Burdzy, K. and Chen Z.-Q. : *Censored Stable Processes*. Prob. Theory and Rel. Fields, Vol. 127, Issue 1, pp 89–152 (2003).
- [2] Chen, H., Felmer, P. and Quaas, A. : *Large Solutions to Elliptic Equations Involving Fractional Laplacian*. Preprint.
- [3] Ishii, H. and Nakamura, G. : *A Class of Integral Equations and Approximation of  $p$ -Laplace Equations*. Calc. Var. PDE, no. 37, 485–522 (2010).

## Modelling conjugate heat and mass transfer food thawing and mixed convection in air

*Carlos E. Zambra, Leopoldo A. Jauriat and Nelson O. Moraga*

Fluid dynamics, heat and mass transfer in mixed convection conjugate to heat and mass transfer by diffusion with solid to liquid phase of water inside a solid food are described by a system of six highly non-linear coupled PDEs. Numerical simulations with the Finite Volume Method are used to predict the history of the dependent variables: velocity ( $v$ ), pressure ( $P$ ), temperature ( $T$ ) and vapor water concentration ( $c_w$ ) in the surrounding air and simultaneously for  $T$  and  $c_w$  in meat during thawing by a hot air flow.

Consider the heating process of a solid frozen food by an external air flow at a high temperature in a thawing tunnel. The classical mathematical model to solve the problem is built based on two coupled PDE's describing heat and mass by the diffusion transient equations with convective boundary conditions of the third kind, of the Robin type. This traditional procedure introduces uncertainties due to the lack of knowledge on the external heat and mass transfer coefficients and on the variations in time of the surrounding air temperature and vapor water concentration. The development of fast processor at low cost in PC's allows to propose a more general and accurate mathematical model using seven coupled PDE's, five characterizing the mixed (forced and natural) heat and mass convection in the air and two PDE's describing the transport diffusion of heat and mass in the food. Therefore, the governing equations for this improved model are:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{D(\rho\phi)}{Dt} = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial y}$$

$$(2, 3) \quad \frac{D(\rho u)}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) ; \quad \frac{D(\rho v)}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho\beta g(T - T_{ref})$$

$$(4, 5) \quad \frac{D(\rho c_p T)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad ; \quad \frac{D(c_i)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right)$$

$$(6, 7) \quad \frac{\partial(\rho c T)_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right) \quad ; \quad \frac{\partial c_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_w \frac{\partial c_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_w \frac{\partial c_w}{\partial y} \right)$$

---

N.O. Moraga was partially supported by FONDECYT Grant 1140074 and by Dirección de Investigación de la Universidad de la Serena (DIULS).

The boundary conditions for the air flow include no-slip on the horizontal walls of the tunnel, inlet uniform horizontal velocity of 1 m/s at the left side and developed flow at the exit (right side), uniform temperature of 41°C at the inlet and on the horizontal walls and thermally developed air flow at the exit. The initial conditions assume that the air is at rest with a temperature of 41°C while the food (a portion of meat of 0.045m in length by 0.023m of high), located at the channel base at 0.18m from the inlet is at -15°C, with a water content  $\phi_i = 0.7$ .

The presence of non-linear convective terms in the linear momentum equations, in the energy equation at the solid-liquid moving front in the food; the coupling between the external laminar flow of air with transport of heat and mass and the problem of heat and mass transfer by diffusion in the solid food is solved by the Finite Volume Method. The parabolic partial differential transient linear momentum and energy equations of the continuum model are transformed into elliptic differential equations by integrating the transient terms accounting for fluid acceleration of the external air and for the rate of change of the internal energy of both the surrounding air and inside the solid food and casting them as a source term that varies linearly with temperature. The space is discretized with a structured staggered grid, with the scalars (temperature and pressure) being calculated at the nodes located in the center of the cell volumes while the vectors (velocity, heat and mass fluxes) are calculated at the cell surfaces. Linear interpolation functions for each dependent variable are used to evaluate the diffusion terms (viscous forces and conduction heat and mass fluxes) while the convective terms in the momentum, energy and species equations are calculated using interpolations functions of the fifth power type. A predictor-corrector method, Semi Implicit Pressure Linked Equations, SIMPLE, was the algorithm used to solve in an implicit way the discrete version of the governing PDEs. Then, the system of algebraic equations was solved by a mixed method built by combining the Thomas algorithm (TDMA) and the Gauss-Seidel method with an in house code in Fortran language. Successive under-relaxation for each dependent variable was used as the stabilization technique [3]. A comparison between the classical diffusion transient model and conjugate model with experimental data for the thawing curve of meat (temperature of the food center during the heating process) indicates that the proposed conjugate model reduces the error in the thawing time from 13.5% obtained with the classical two transient diffusion equations models to 4.1% when the six transient convective-diffusion conjugate model is used. Additionally, time averaged temperature deviations in the food center of 3.8°C from the solution with the classical two equations model to measured temperature reduces to 1.5°C when the conjugate mixed convective diffusion six equation model is used.

## References

- [1] Delgado, E.; Sun, D.W. *One-dimensional finite difference modelling of heat and mass transfer during thawing of cooked cured meat*. Journal of Food Eng. 57 (2003),383-389.
- [2] Moraga N.; Barraza, H. *Predicting heat conduction during solidification of a food inside a freezer due to natural convection*. Journal of Food Eng. 56 (2003), 17-26.
- [3] Jauriat, L. *Simulación de procesos de descongelación y congelación de alimentos*. Doctorado de Ingeniería de Procesos, Universidad de Santiago de Chile (2011).

# Física Matemática

# Unitary Laurent Operators and GGT Matrices with constant Verblunsky coefficients

*M.A. Astaburuaga, O. Bourget, V.H. Cortés*

## Abstract

Let  $f$  be a regular non-constant symbol defined on  $\mathbb{T}^d$  with values on the unit circle. Denote respectively by  $\kappa$  and  $L$ , the set of critical points of  $f$  and the associated Laurent operator on  $l^2(\mathbb{Z}^d)$ .  $L$  is unitary and its spectral properties are well known. We use Mourre theory to study  $L$  and some perturbed operators  $LW$  where  $W$  is a suitable unitary compact operator. We conclude that  $LW$  has finite point spectrum and no singular continuous component away from the set  $f(\kappa)$ . Some propagating estimates are derived. This provides a new approach to analyze the spectral properties of GGT matrices with asymptotically constant Verblunsky coefficients.

## References

- [1] W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu,  *$C_0$ -groups, Commutator Methods and Spectral Theory of Hamiltonians*, Birkhäuser, 1996.
- [2] M.A Astaburuaga, O. Bourget, V.H. Cortés, *Commutation Relations for Unitary Operators*, submitted (<http://arxiv.org/abs/1311.5127>)
- [3] Georgescu, V.; Gérard, C.; Moller, J. S. Commutators,  $C_0$ -semigroups and resolvent estimates. *J. Funct. Anal.* 216 (2004), no. 2, 303-361.
- [4] S. Golénia, T. Jecko, *A new look at Mourre's commutator theory*, *Complex Anal. Oper. Theory* 1 (2007), no. 3, 399-422.
- [5] L. Golinskii, P. Nevai, W. Van Assche, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle*, *J. Approx. Theory* 83 (1995), no. 3, 392-422.
- [6] L. Golinskii, P. Nevai, *Szegő difference equations, transfer matrices and orthogonal polynomials on the unit circle*, *Comm. Math. Phys.* 223 (2001), no. 2, 223-259.
- [7] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle. Parts 1 & 2*, American Mathematical Society, Colloquium Publications 54, 2005.
- [8] B. Simon, *Szegő's theorem and its descendants. Spectral theory for  $L^2$  perturbations of orthogonal polynomials*, M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, 2011.



# Energía del estado fundamental de un sistema de polarones

*R. D. Benguria*

## Abstract

El último problema abierto sobre el sistema de muchos polarones, en la aproximación de Pekar–Tomasevich, es el caso de bosones con la repulsión de Coulomb electrón–electrón de constante de acoplamiento exactamente 1 (i.e., el ‘caso neutral’). En esta charla presentaré la demostración obtenida recientemente [1] del hecho que la energía del estado fundamental, para  $N$  grande se comporta exactamente como  $-N^{7/5}$ , y mostraré cotas inferiores y superiores sobre el coeficiente asintótico, las que coinciden dentro de un factor  $2^{2/5}$ .

## References

- [1] R. D. Benguria, R. Frank, and E. H. Lieb *Ground state energy of large polaron systems*, enviado a publicación (2014).

---

Pontificia Universidad Católica de Chile, rbenguri@uc.cl

El trabajo es financiado por el Proyecto Fondecyt 112–0836 y por la Iniciativa Científica Milenio (Chile), Núcleo Milenio: RC–120002 “Física Matemática”.

# Generación de álgebras graduadas vía complejos de gauge y ecuaciones diferenciales de tipo pseudo-esférico

*Samin Ingrith Cerón Bravo*

## Abstract

Dennis Sullivan en [4] define un *álgebra de Sullivan descomponible* como un álgebra graduada conmutativa diferencial (cdga) libre generada por un espacio vectorial graduado  $V = \bigoplus V^i$  de la forma  $(\Lambda V, d)$ , en la cual el diferencial satisface la condición  $dV \subseteq \Lambda V^{\geq 2} V$ . Sullivan además prueba que esta noción puede ser descrita en términos de un álgebra de Lie dual a  $V^1$  y una secuencia de *clases de cohomología torcida*.

Posteriormente él refina esta noción y define un *álgebra de Sullivan minimal* como un álgebra graduada conmutativa libre generada por un espacio vectorial graduado  $V$  que admite una base homogénea bien ordenada  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$  compatible con el grado [esto es, si  $\beta < \alpha$ , entonces  $|v_\beta| \leq |v_\alpha|$ ] y tal que el diferencial  $d$  satisface  $dv_\alpha \in \Lambda V_{< \alpha}$  para cada  $\alpha \in I$ , donde  $\Lambda V_{< \alpha}$  denota el subespacio de  $V$  generado por  $\{v_\beta\}_{\beta < \alpha}$ .

Inspirado por la construcción del complejo de De Rham de formas diferenciales sobre una variedad, Sullivan introduce el así llamado *modelo minimal* de un espacio topológico dado. Para este fin, primero construye la cdga de formas diferenciales polinómicas  $A_{PL}(X)$  de un espacio topológico  $X$  dado. Después, para cualquier cdga  $A$  conexa ( $H^0(A) = \mathbb{Q}$ ) Sullivan construye su *modelo minimal*, esto es, un quasi-isomorfismo  $\rho: (\Lambda V, d) \rightarrow A$  donde  $(\Lambda V, d)$  es un álgebra de Sullivan minimal. El *modelo minimal de  $X$*  es, por definición, el modelo minimal de  $A_{PL}(X)$ .

Nosotros estamos interesados en identificar propiedades de cdgas asociadas a variedades generadas por ecuaciones diferenciales, particularmente aquellas relacionadas en el estudio de complejos lineales de gauge (ver [2]) y de ecuaciones diferenciales de tipo pseudo-esférico (ver [3]), que nos permitan generar álgebras de Sullivan descomponibles, álgebras de Sullivan minimales y modelos minimales. Por ejemplo, podemos construir álgebras de Sullivan descomponibles partiendo de ecuaciones que se pueden analizar usando el método de scattering/scattering inverso. Recíprocamente, a futuro pretendemos analizar si este proceso puede ser topológicamente realizable. En otras palabras, buscamos un espacio topológico que tenga como modelos algebraicos las construcciones generadas anteriormente.

Trabajo de Grado dirigido por: *Dr. Enrique Reyes García*<sup>1</sup>.

---

Universidad Santiago de Chile, sicbravo@gmail.com

El trabajo es financiado por el Proyecto MECESUP.

<sup>1</sup>Universidad de Santiago de Chile, e-mail: ereyes@fermat.usach.cl

## References

- [1] Yves. Félix, Stephen. Halperin, Jean-Claude. Thomas: *Rational homotopy theory*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 205, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [2] Michal. Marvan: *On zero-curvature representations of partial differential equations*, In: Kowalski, O., Kruoka, D.(eds.) *Differential Geometry and its applications*, Silesian University Opava, 103-122, 1993.
- [3] Enrique. Reyes: *Equations of pseudo-spherical type*, *Results in Mathematics*, 60, 53-101, 2011.
- [4] Dennis. Sullivan: *Infinitesimal computations in topology*, *Inst. hautes Études Sci. Publ. Math*, 47, 269-331, 1977.

# Commutator relations for classical Toeplitz operators

M.A. Astaburuaga, O. Bourget, V.H. Cortés

## Abstract

A classical Toeplitz matrix  $M$  is an infinite matrix  $M := M_f = (a_{ij})$ ,  $i, j \geq 0$  where  $a_{ij} = \hat{f}(i - j)$  with  $\hat{f}(k)$  the  $k$ -order Fourier coefficient of  $f$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$M = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

A classical result due to Otto Toeplitz says that the above matrix defines a bounded operator on the Hilbert space  $l^2(\mathbb{Z}_+)$  if and only if the numbers  $\{a_n\}_n$  are the coefficients of some function  $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ .

This infinite matrix  $M$  corresponds to a matrix of the compression of Laurent operator:  $L_f(\phi)(n) = (\hat{f} * \phi)(n) = \sum_k \hat{f}(n - k)\phi_k$ , defined on  $l^2(\mathbb{Z})$ , that is,  $M_f = Q_0 L_f Q_0$  with  $Q_0$  be the orthogonal projector on  $l^2(\mathbb{N})$ , see [3], [4], [6], [7] as a references.

In this talk we develop a commutator theory for classical Toeplitz matrices  $M := M_f$ . Precisely, under suitable regularity conditions on the real-valued symbol  $f$  defined on the torus  $\mathbb{T}$ , we are able to construct a class of adjoint operators  $A_f$  satisfying Mourre's theory, see [1], [2]. As a consequence, it allows us to study the spectrum of the free  $M$  and compact perturbed  $M + V$  operators. Also, some propagating decay are given.

## References

- [1] W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, *C<sub>0</sub>-groups, Commutator Methods and Spectral Theory of Hamiltonians*, Birkhäuser, 1996.
- [2] M.A. Astaburuaga, O. Bourget, V.H. Cortés, *Commutator Relations for Unitary Operators I*, Accepted J. Funct. Anal. (2014).
- [3] F.F. Bonsall, S.C Power, *A proof of Hartman's theorem on compact Hankel operators*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 78 (1975), no. 3, 447-450.

---

\*Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, vcortes@mat.puc.cl

\*Supported by the Grant Fondecyt 1120786, Anillo ACT 1112.

- [4] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators*, Springer, 1990.
- [5] R.G. Douglas, C. Pearcy, *Spectral theory of generalized Toeplitz operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965) 433-444.
- [6] M. Rosenblum, *The absolute continuity of Toeplitz's matrices*, Pacific J. Math. 10 (1960) 987-996.
- [7] H. Widom, *On the spectrum of a Toeplitz operator*, Pacific J. Math. 14 (1964) 365-375.

# Efecto de cut-off en la velocidad de propagación de frentes en la ecuación de reacción-difusión

*R. D. Benguria, M. C. Depassier*

## Abstract

La velocidad de propagación de frentes de la ecuación de reacción-difusión en una dimensión

$$u_t = u_{xx} + f(u) \quad \text{con} \quad f(0) = f(1) = 0,$$

ha sido estudiada tanto por su interés matemático como por sus aplicaciones a distintos problemas físicos, de dinámica de poblaciones, combustión, reacciones químicas y otros. En particular, Kolmogorov, Petrovski y Piskounov (KPP 1937) probaron que si el término de reacción  $f(u) > 0$  satisface  $f'(u) < f'(0)$  entonces una condición inicial localizada tiende a un frente que se propaga con velocidad  $c = c_{KPP} = 2\sqrt{f'(0)}$ . Zeldovich y Frank-Kamenetskii (1938) por su parte consideran un término de reacción muy localizado en  $u = 1$  cuya derivada se anula en  $u = 0$  y encuentran que el frente se propagará con velocidad

$$c_{ZFK} = \sqrt{2 \int_0^1 f(u) du}.$$

Aronson y Weinberger (AW) prueban que la velocidad del frente satisface  $2\sqrt{f'(0)} \leq c \leq 2 \sup \sqrt{f(u)/u}$ . Además si  $f > 0$  en  $(0, 1)$  existe un continuo de frentes y el sistema evoluciona hacia el de menor velocidad. Para un caso biestable el frente y su velocidad son únicos.

En diversas situaciones es necesario considerar el efecto de ruido aditivo o la finitud en el número de partículas que difunden. Brunet and Derrida (1997) conjeturan que estos efectos se pueden modelar por la ecuación clásica introduciendo un cut-off en  $u = 0$  en el perfil de reacción. En este caso los resultados de AW no son válidos. Brunet y Derrida validan su hipótesis numéricamente. Usando métodos perturbativos muestran que la velocidad de un frente de tipo KPP será

$$c \approx 2 - \frac{\pi^2}{(\log \epsilon)^2},$$

en que se normalizó  $f'(0) = 1$ . Para el caso de un frente biestable particular se encuentra que la velocidad tiene una corrección proporcional a una potencia de  $\epsilon$ .

---

Pontificia Universidad Católica de Chile, mcdepass@uc.cl  
El trabajo es financiado por el Proyecto Fondecyt 1141155.

En esta charla mostraremos la solución general de este problema usando el principio variacional [1]

$$c^2 = \sup \left( 2 \frac{\int_0^1 f(U) g(U) du}{\int_0^1 (-g^2(U)/g'(U)) dU} \right),$$

en que el supremo se toma sobre funciones de prueba  $g > 0$ , decrecientes. Siempre se alcanza el máximo para frentes no KPP. El  $g$  óptimo,  $\hat{g}$ , es la solución de

$$\frac{\hat{g}'}{\hat{g}} = -\frac{c}{p} \quad \text{donde} \quad p(U) = -\frac{dU}{dz}$$

Demostramos [2, 3] que si se introduce un cut-off  $\epsilon$  a un frente KPP la nueva velocidad está dada por

$$c = 2 \sin \phi \quad \text{con} \quad \phi \tan \phi = |\ln \epsilon|/2.$$

El primer término de la expansión para  $\epsilon \ll 1$  es la corrección de Brunet–Derrida.

Para frentes no KPP, demostramos [4] que la corrección a la velocidad se obtiene integrando

$$\frac{d\Delta c}{d\epsilon} = -K Q \epsilon^{c_0/k_2} f(\epsilon)$$

donde  $c_0$  es la velocidad del frente en ausencia de cut-off,  $k_2 = -c_0/2 - \sqrt{c_0^2 - 4f'(0)}/2$  es el decaimiento del frente sin cut-off ( $u \approx \exp^{k_2 z}$   $z \rightarrow \infty$ ).  $K$  es una constante que depende de la integral de la solución exacta sin cut-off y

$$Q = \left[ \frac{c_0 + \sqrt{c_0^2 - 4f'(0)}}{2\sqrt{c_0^2 - 4f'(0)}} \right]^{c_0/k_2} = \left( \frac{1}{2 + c_0/k_2} \right)^{c_0/k_2},$$

## References

- [1] R. D. Benguria y M. C. Depassier: *Speed of fronts of the reaction–diffusion equation*, Physical Review Letters, 77, 1171–1173, 1996.
- [2] R. D. Benguria y M. C. Depassier: *Speed of pulled fronts with a cutoff*, Phys. Rev. E 75, 051106, 2007.
- [3] R. D. Benguria, M. C. Depassier y M. Loss: *Rigorous results for the minimal speed of Kolmogorov–Petrovski – Piscounov monotonic fronts with a cutoff*, J. Math. Phys. 53, 123705, 2012.
- [4] R. D. Benguria y M. C. Depassier : *Shift in the speed of reaction–diffusion equation with a cut–off: Pushed and bistable fronts*, Physica D, 280, 38-43, 2014.

# Descripción asintótica local del espectro de perturbaciones métricas del Hamiltoniano de Landau

*Tomás Lungenstrass y Georgi Raikov*

## Abstract

Consideramos perturbaciones métricas del Hamiltoniano de Landau. Investigamos el comportamiento asintótico del espectro discreto a medida que nos aproximamos a los niveles de Landau. Consideramos perturbaciones con decaimiento como potencia, decaimiento exponencial y con soporte compacto.

## References

- [1] Este trabajo se encuentra actualmente en proceso de redacción.



# Estimaciones de Mourre para operadores de Schrödinger cristales topológicos

*Daniel Parra*

## Abstract

En esta charla consideramos operadores de Schrödinger en cristales topológicos, considerados como cubrimientos de grafos finitos tales que su grupo de transformación es abeliano libre. A través de la descomposición de Floquet-Bloch se puede determinar el espectro del Laplaciano y mostrar que es absolutamente continuo; la principal herramienta es la teoría de Mourre para operadores analíticamente fibrados. Después de presentar este marco, concentraremos nuestra atención en operador perturbado  $\Delta_X + V$  para mostrar que, cuando se asume un cierto decaimiento del potencial  $V$ , la perturbación deja esencialmente estable el espectro de  $\Delta_X$ . Varios ejemplos de cristales topológicos serán considerados.

Esta charla corresponde a nuestro trabajo doctoral en curso bajo la supervisión de Serge Richard.

# Caida libre en Relatividad General

*Enrique Reyes García*

## Abstract

En esta charla presentaré dos teoremas sobre caída libre en Relatividad General. Primero, mostraré que una partícula que se mueve libremente en un espacio-tiempo debe seguir una geodésica. En efecto, este teorema se mostrará como un caso particular del análisis del movimiento de una partícula con spin en un espacio-tiempo con torsión. Segundo, mostraré que si un cuerpo distorsiona el espacio-tiempo  $(M, g)$  en que se mueve, de todas formas, en un límite apropiado, se mueve a lo largo de una geodésica (con respecto a la métrica  $g$ ). El primer teorema es básicamente una aplicación de la teoría de reducción simpléctica a la J. M. Souriau. El segundo resultado es una versión rigurosa de argumentos relativamente recientes de J. Ehlers y R. Geroch.

## References

- [1] M. Bezares, G. Palomera, D. Pons and E.G. Reyes, *The Geroch-Ehlers theorem on geodesic motion in General Relativity*. To appear, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2014.
- [2] J. Ehlers and R. Geroch, *Equation of Motion of Small Bodies in Relativity*. Annals of Physics 309 (2004), 232–236.
- [3] A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann, *The Gravitational Equations and the Problem of Motion*. Annals of Mathematics 39 (1938), 65–100.
- [4] H.P. Künzle, *Canonical dynamics of spinning particles in gravitational and electromagnetic fields*. J. Math. Phys. 13 (1972), 739–744.
- [5] E.G. Reyes, *On the motion of particles and strings, presymplectic mechanics, and the variational bicomplex*. General Relativity and Gravitation 37 (2005), 437–459.

# Ballistic dynamics of Dirac particles in electro-magnetic fields

*Josef Mehringer, Edgardo Stockmeyer*

## Abstract

Consider a two-dimensional Dirac operator coupled to an electric field and a magnetic field perpendicular to the plane. If the system has certain symmetry, the fields can be described by one-dimensional potentials  $V$  and  $A$ , respectively. Assuming that  $|A| < |V|$  outside some arbitrary large ball we show that absolutely continuous states of the effective Dirac operators spread ballistically. These results are based on well known methods in spectral dynamics together with certain new Hilbert-Schmidt bounds. We use Lorentz boosts to derive these new estimates.

---

Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile, stock@fis.puc.cl

El trabajo es financiado por el Proyecto Fondecyt N° 1141008 y Nucleo Millenium RCaÑ\$120002  
âÄIJFísica MatemaáticaâÄI.

# Commutator criteria for strong mixing

*Rafael Tiedra de Aldecoa*

## Abstract

We present new criteria, based on commutator methods, for the strong mixing property of discrete flows  $U^N$  and continuous flows  $e^{-itH}$  induced by unitary operators  $U$  and self-adjoint operators  $H$  in a Hilbert space  $H$ . Our approach put into evidence a general definition for the topological degree of the curves  $N \rightarrow U^N$  and  $t \rightarrow e^{-itH}$  in the unitary group of  $H$ . As an example, we present an application to time changes of horocycle flows.

# Geometría

# Hypersurfaces achieving the Homma-Kim bound

*Andrea Luigi Tironi*

## Abstract

Let  $X$  be a hypersurface in  $\mathbb{P}^N$  with  $N \geq 3$  defined over a finite field. In this talk we show a result about the classification, up to projective equivalence, of hypersurfaces  $X$  as above without a linear component when the number of their rational points attains the Homma-Kim bound.

## References

- [1] Andrea L. Tironi: *Hypersurfaces achieving the Homma-Kim bound*, preprint 2014, arXiv:1410.7320v2.

# About the semiample cone of the symmetric product of a curve

*Antonio Laface*

## Abstract

Let  $C$  be a smooth complex projective curve of genus  $g = 4$ . It is well-known [1] that the canonical model of  $C$  is the intersection of a quadric  $Q$  with a cubic of  $\mathbb{P}^3$  and that  $C$  admits two  $g_3^1$ , cut out by the two rulings of  $Q$ , whenever  $Q$  is not a cone. We let  $\eta_C \in \text{Pic}^0(C)$  be the class of the difference of the two  $g_3^1$ . We show that the locus

$$\{[C] \in \mathcal{M}_4 : \eta_C \text{ is torsion}\} \subseteq \mathcal{M}_4$$

is Zariski dense and contains a countable union of varieties of dimension 5. Moreover, let  $C^{(2)}$  be the second symmetric product of  $C$  with itself and let  $\Gamma \subseteq C^{(2)}$  be the 3 : 1 correspondence given by one of the  $g_3^1$ . In [2] the author proves that the class of the curve  $\Gamma$  spans an extremal ray of the intersection of the effective cone of  $C^{(2)}$  with the rational vector space spanned by the classes of  $\Gamma$  and the diagonal. Here we show that  $\Gamma$  is semiample if and only if  $\eta_C$  is torsion non-trivial.

This is joint work in progress with Michela Artebani and Gian Pietro Pirola.

## References

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris: *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, 267. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [2] A. Kouvidakis: *Divisors on symmetric products of curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 337 (1993), no. 1, 117–128.

# Identities on hyperbolic surfaces

*Ara Basmajian*

## Abstract

Let  $X$  be a compact hyperbolic surface with either geodesic or horocyclic boundary. The homotopy class (rel the boundary) of a non-trivial arc from the boundary to itself can be realized by an *orthogeodesic*- a geodesic segment perpendicular to the boundary at its initial and terminal points. This talk is about a special subclass of orthogeodesics called *primitive* orthogeodesics. In ongoing work with Hugo Parlier and Ser Peow Tan we show that the primitive orthogeodesics arise naturally in the study of maximal immersed pairs of pants in  $X$  and are intimately connected to regions of  $X$  in the complement of the natural collars. These considerations lead to continuous families of new *identities*- equations that remain constant on the space of hyperbolic structures.



# Foliations on Lie groupoids and homotopy representations

*Cristián Ortiz*

## Abstract

Lie groupoids are geometric objects which include several geometric structures as particular instances (e.g. Lie groups, manifolds, Lie group actions, regular foliations among others) and provide a conceptually clear framework to deal with moduli problems. Also, Lie groupoids arise naturally in connection with symplectic and Poisson geometry, e.g. Poisson manifolds, whenever possible, integrate to symplectic groupoids, in the same spirit that Lie algebras integrate to Lie groups. Motivated by problems of quantization in Poisson geometry, the talk will discuss recent results about the infinitesimal description of Lie groupoids equipped with foliations suitably compatible with the groupoid structure. We will see that the infinitesimal description of such foliated groupoids is given by certain flat connections, which can be interpreted in terms of homotopy representations but also give rise to a good notion of ideal in a Lie algebroid. If time permits, I will briefly explain the relation between these objects and differentiable stacks. The results discussed in this talk are part of joint works with T. Drummond and Madeleine Jotz.

## References

- [1] M. Jotz, C. Ortiz: *Foliated groupoids and infinitesimal ideal systems*, Indag. Mathematicae, 25, 1019–1053, 2014.
- [2] T. Drummond, M. Jotz, C. Ortiz:  *$\mathcal{VB}$ -algebroid morphisms and representations up to homotopy*, arxiv:1302.3987, 2013.

---

Universidade de São Paulo, cortiz@ime.usp.br.

Partially supported by Projeto Universal “Estruturas Homotópicas em Álgebra e Geometria”, CNPq-Brasil

# The Craighero–Gattazzo surface is simply-connected

*Julie Rana, Jenia Tevelev, Giancarlo Urzúa*

## Abstract

We show that the Craighero–Gattazzo surface [2], the minimal resolution of an explicit complex quintic surface with four elliptic singularities, is simply-connected. This was conjectured by Dolgachev and Werner [3], who proved that its fundamental group has a trivial profinite completion. Thus the Craighero–Gattazzo surface provides the only explicit example of a smooth canonically polarized simply-connected complex surface of geometric genus zero. We hope that our method will find other applications: to prove a topological fact about a complex surface we use an algebraic reduction mod  $p$  technique and deformation theory.

Let  $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$  be the quintic surface

$$\begin{aligned} & a^2(x^2y^3 + x^3t^2 + y^2z^3 + z^2t^3) + m^2(x^3z^2 + x^2z^3 + y^3t^2 + y^2t^3) + \\ & 2am(xy^3z + xy^3t + x^3zt + yzt^3) + 14m(x^3yz + y^3zt + xz^3t + xyt^3) + \\ & 7b(x^2y^2z + y^2z^2t + x^2yt^2 + xz^2t^2) + 14a(xy^3z + x^3yt + yz^3t + xzt^3) + \\ & c(x^2yz^2 + x^2z^2t + xy^2t^2 + y^2zt^2) + 7e(xy^2z^2 + x^2y^2t + x^2zt^2 + yz^2t^2) + \\ & f(x^2yzt + xy^2zt + xyz^2t + xyzt^2) + 49(x^3y^2 + y^3z^2 + z^3t^2 + x^2t^3) = 0 \end{aligned}$$

The coefficients are (from [1, p. 25] multiplied by 49)

$$\begin{aligned} a &= 7r^2, & b &= -2r^2 + 13r + 18, & c &= 73r^2 + 75r + 92, \\ e &= -r^2 + 24r + 9, & f &= 181r^2 + 241r + 163, & m &= 3r^2 + 5r + 1, \end{aligned}$$

where  $r$  is a complex root of the equation  $r^3 + r^2 - 1 = 0$ . The surface is invariant under the  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  action which cyclically permutes the variables as follows:  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow t \rightarrow x$ .

The quintic surface  $X$  is singular at the points

$$P_1 = [1 : 0 : 0 : 0], \quad P_2 = [0 : 1 : 0 : 0], \quad P_3 = [0 : 0 : 1 : 0], \quad P_4 = [0 : 0 : 0 : 1].$$

Its minimal resolution is the Craighero–Gattazzo surface. In this talk I will show the ideas and techniques to prove that this surface is simply connected. This was conjectured by Dolgachev and Werner [3], who proved that its fundamental group has a trivial profinite completion.

---

Marlboro College, Vermont, USA, jrana@marlboro.edu  
University of Massachusetts Amherst, Massachusetts, USA, tevelev@math.umass.edu.  
PUC, Santiago, Chile, urzua@mat.puc.cl

## References

- [1] F. Catanese, R. Pignatelli: *On simply connected Godeaux surfaces*, Complex analysis and algebraic geometry, de Gruyter Berlin (2000), 117–153.
- [2] P.C. Craighero, R. Gattazzo: *Quintic surfaces of  $\mathbb{P}^3$  having a nonsingular model with  $q = p_g = 0$ ,  $P_2 \neq 0$* , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **91** (1994), 187–198.
- [3] I. Dolgachev, C. Werner: *A simply connected numerical Godeaux surface with ample canonical class*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no.4, 737–764. Erratum: J. Algebraic Geom. **10** (2001), no.2, 397.

# The fundamental group of a $\mathbb{T}$ -variety

*Antonio Laface, Alvaro Liendo, Joaquín Moraga*

## Abstract

In this talk we use the language of polyhedral divisors (see e.g. [1], [2]) to compute the fundamental group of a variety with torus action and log-terminal singularities.

Given a divisorial fan  $\mathcal{S}$  on a variety  $Y$ , we denote by  $X(\mathcal{S})$  the associated  $\mathbb{T}$ -variety. We define a group  $N(\mathcal{S})$  which only depends on the combinatorial structure of  $\mathcal{S}$  and sketch a proof of the following Theorem.

**Theorem.** Let  $X = X(\mathcal{S})$  be a  $\mathbb{T}$ -Variety with log-terminal singularities. Then

$$\pi_1(X(\mathcal{S})) \simeq N(\mathcal{S}) \times \pi_1(Y).$$

Remark that the group  $\pi_1(X(\mathcal{S}))$  splits into two groups, one depending only on the combinatorial structure of  $\mathcal{S}$  and another depending only on the topology of the variety  $Y$ . This is part of a work in progress about the topology of  $\mathbb{T}$ -varieties [3].

## References

- [1] J. Hausen, K. Altmann. *Polyhedral divisors and algebraic torus actions*, Math. Ann. 334, 557-607 (2006).
- [2] K. Altmann, I. N. Ilten, L. Petersen, H. Suss, R. Vollmert. *The geometry  $\mathbb{T}$ -varieties*, IMPANGA Lecture Notes, Contributions to Algebraic Geometry, 2012, 17-69.
- [3] A. Laface, A. Liendo, J. Moraga. *Topology of  $\mathbb{T}$ -varieties* (work in preparation).

---

Departamento de Matemática, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile, alaface@udec.cl

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 721, Talca, Chile, aliendo@inst-mat.utalca.cl

Departamento de Matemática, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile, joamoraga@udec.cl

# $\mathbb{Z}_p^n$ actuando en Superficies de Riemann.

*Mariela Carvacho, Anthony Weaver*

## **Abstract**

Una pregunta natural en el estudio del grupo de Automorfismos de superficies de Riemann es cuando este admite un subgrupo del tipo  $\mathbb{Z}_p^n$ .

Este tipo de grupos nos entrega información de algunas componentes del espacio de Moduli de Superficies de Riemann.

En esta charla nos centraremos en el caso  $p = 2l$ . La idea es mostrar las condiciones necesarias para que una superficie de Riemann admita este tipo de grupos y mostrar su relación con los espacios de Moduli.

Este es un trabajo en progreso con Anthony Weaver.

# Calabi-Yau hypersurfaces of Fano toric varieties

*Michela Artebani*

## Abstract

In [1] Batyrev defined a duality between Gorenstein toric Fano varieties which relies on the fact that the polar of a reflexive polytope is still reflexive. Such duality is interesting since the anticanonical linear series  $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$  of two dual toric varieties provide families of Calabi-Yau varieties which satisfy the requirement of topological mirror symmetry [3]:

$$h^{1,1}(X) = h^{2,1}(X^*), \quad h^{1,1}(X^*) = h^{2,1}(X)$$

for general  $X \in \mathcal{F}, X^* \in \mathcal{F}^*$ .

In this talk we will present a generalization of Batyrev duality between families of Calabi-Yau hypersurfaces with a fixed Newton polytope, in toric Fano varieties which are not necessarily Gorenstein. This relies on the polar duality between pairs of lattice polytopes  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , where  $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ , and  $\Delta_1, \Delta_2^*$  have a unique interior point. In case  $\Delta_1 = \Delta_2$  our duality coincides with Batyrev's one, while in case both  $\Delta_1$  and  $\Delta_2$  are simplexes this gives the Berglund-Hübsch-Krawitz duality [2, 4], a mirror pairing for Calabi-Yau hypersurfaces in certain fake weighted projective spaces. This is joint work in progress with Paola Comparin.

## References

- [1] V.V. Batyrev: *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebraic Geom. 3, no. 3, 493–535, 1994.
- [2] P. Berglund and T. Hübsch: *A generalized construction of mirror manifolds*, Nuclear Phys. B 393, 1-2, 377-391, 1993.
- [3] D.A. Cox and S. Katz: *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [4] M. Krawitz: *FJRW rings and Landau-Ginzburg mirror symmetry*, PhD thesis, University of Michigan, 2010.

# A generalization of the Recillas construction

*Rubí E. Rodríguez and Angel Carocca*

## Abstract

We generalize the Recillas construction to abelian varieties.

The well-known Recillas construction gives a natural correspondence between Jacobian of tetragonal curves and Prym varieties of trigonal curves.

In this talk we will present its generalization to abelian varieties, using Galois correspondences.

## References

- [1] S. Recillas: *Jacobians of curves with  $g_4^1$ 's are the Prym's of trigonal curves*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 19, 9–13, 1974.

# Non commutative K3 surfaces and moduli spaces of sheaves

*Sukhendu Mehrotra*

## Abstract

Let  $X$  be a K3 surface, and  $X^{[n]}$  its Hilbert scheme of points. Beauville showed that  $X^{[n]}$  is a holomorphic, symplectic manifold with a 21 dimensional family of deformations. The general such deformation is, however, not the Hilbert scheme on any K3. Mukai showed that similar statements are true for moduli spaces of stable sheaves on  $X$ . Let  $M$  be the component of the moduli space of (marked) holomorphic symplectic manifolds containing Hilbert schemes of K3s. In joint work with Eyal Markman, we show how to naturally associate a K3 category to every point in a dense open set of  $M$ . This talk will discuss this result, and time permitting, applications and further questions.



# Optimización

# Non-Convex Second Order State Dependent Sweeping Processes in Hilbert Space

*Ba Khiet Le, Samir Adly*

## Abstract

In this paper, we study the well-posedness property of the non-convex second order state dependent sweeping processes under perturbation in Hilbert space of the following form

$$\begin{cases} A_2\ddot{u}(t) + A_1\dot{u}(t) + A_0u(t) \in -N_{C(t,u(t))}(\dot{u}(t)) - F(t, u(t), \dot{u}(t)) & a.e. \ t \in [0, T] \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0, \end{cases} \quad (1)$$

Here  $A_0, A_1, A_2$  are linear bounded operators and perturbing force  $F(\cdot)$  is a set-valued mapping which depends on time, state and velocity. For each  $t \in [0, T], x \in H$  the set  $C(t, x)$  is supposed to be *prox-regular* (possibly non-convex) and have a Lipschitz variation.

## References

- [1] S. ADLY, T. HADDAD, L. THIBAUT, *Convex Sweeping Process in the framework of Measure Differential Inclusions and Evolution Variational Inequalities*, Math. Prog. serie B, DOI 10.1007/s10107-014-0754-4, 2014.
- [2] J. F. EDMOND, L. THIBAUT, *Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process*, Math Prog. Ser. B 104, 2005, 347-373.
- [3] L. THIBAUT, *Sweeping process with regular and nonregular sets*, J. Differ. Equ. 193, 1–23 (2003).

# The ROF model in $H^1$ and algorithms for the numerical resolution

*Cesare Molinari*

## Abstract

The talk presents a convex-analytic numerical approach for some data recovery problems. An adaptation of the ROF model of Rudin, Osher and Fatemi to the space  $H^1$  is analysed from a Hilbert space optimization perspective. The idea of this model, largely used in data recovery, is to minimize an energy functional that can be expressed as the sum of two terms:

- i) The first term is given by a convex and differentiable function that represents the *fidelity* to the data. In this work, a family of weighted  $H^1$  norms is considered;
- ii) The second term is given by the  $L^1$  norm of the gradient, which is a convex and lower-semicontinuous (but non-differentiable) function interpreted as a *Tikhonov regularization* and tends to favor flat areas.

A discussion concerning the modelling and well-posedness of the problem is provided, but the main emphasis is on the numerical solution. Two major strategies involving optimization and discretization are explored:

- (1) *Regularization*: the modulus in the computation of the  $L^1$  norm is replaced by a polynomial approximation around the origin with sufficiently smooth interface. By doing so, it is possible to apply gradient-related or Newton-type methods (which are suitable for smooth objective functions) to solve the optimality conditions.
- (2) *Non-smooth optimization techniques*: instead of regularizing, it is possible to combine smooth optimization methods (as before) for the smooth part of the problem, with non-smooth algorithms such as the proximal point algorithm. The result is a mixed algorithm with two-steps iterations of forward-backward type.

The two approaches are then implemented following both the *discretize, then optimize*, and *optimize, then discretize* paradigms, using first-order finite element methods.

## References

- [1] N1. L. I. Rudin, N2. S. Osher, N3. E. Fatemi: *Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms*, Physica D, Vol. 60, pp. 259-268, 1992.
- [2] N1. J. Peypouquet, N2. A. Cabot: *A Mixed Implicit-Explicit Scheme for Structured Minimization Problems with Constraints* (not yet published).

# Variational analysis in the light of semi-algebraic geometry

*Aris Daniilidis*

## Abstract

In this talk we survey results of the so-called Semi-algebraic (Tame) Optimization, with emphasis to the (variational) desingularization and its consequences in the asymptotic analysis of (nonsmooth) dynamical systems.

## References

- [1] A. Daniilidis *Gradient Dynamical Systems, Tame Optimization and Applications*, Lecture Notes, Spring School on Variational Analysis Paseky nad Jizerou, Czech Republic, April 20-24, 2009.

# Second order asymptotic analysis, basic theory and applications

*Flores-Bazán, F., Hadjisavvas, N., Lara, F.*

## Abstract

Recently, the concepts of second order asymptotic directions and functions have been introduced and applied to global and vector optimization problems. In this work, we establish some new properties for these two concepts. In particular, in case of a convex set, a complete characterization of the second order asymptotic cone is given. Also, formulas that permit the easy computation of the second order asymptotic function of a convex function are established. It is shown that the second order asymptotic function provides a finer description of the behavior of functions at infinity, than the first order asymptotic function. Finally, we present an application to the noncoercive scalar minimization problem.

## References

- [1] H. Attouch, G. Buttazzo G. Michaille, “Variational analysis in sobolev and BV spaces: Applications to PDEs and optimization”, MPS-SIAM, Philadelphia, 2006.
- [2] F. Flores-Bazán, *Existence theorems for generalized noncoercive equilibrium problems: the quasi-convex case*, SIAM Journal on Optimization, 11 (2001), pp. 675–690.
- [3] N. Hadjisavvas, D. T. Luc, *Second-Order Asymptotic Directions of Unbounded Sets with Application to Optimization*, J. of Convex Anal., 18 (2011), pp. 181–202.

---

Based on the paper “Second order asymptotic analysis: basic theory”, subbimet, with F. Flores-Bazán and N. Hadjisavvas.

Universidad de Concepción, Departamento de Ingeniería Matemática, CI<sup>2</sup>MA, Casilla 160-C, Concepción, Chile, felipelara@udec.cl.

El trabajo es financiado por Beca CONICYT para estudios de Doctorado en Chile

# Optimización multi-criterio: algunas dinámicas continuas y algoritmos

*H. Attouch, G. Garrigos, X. Goudou*

## Abstract

Nos interesamos en el problema de minimizar al mismo tiempo varias funciones: por ejemplo vamos a querer minimizar una función costo, requiriendo también que no seamos demasiado lejos de un estado dado. Tradicionalmente se transforma en un problema monocriterio, considerando alguna combinación convexa de estas funciones, con ponderaciones eligidas a priori, y arbitrariamente.

En la optimización multi-criterio, las funciones son tratadas individualmente y estudiamos dinámicas por la cual todas las funciones decrecen al mismo tiempo. Es una forma de dinámica cooperativa. La dinámica se para cuando llegamos a un punto tal que no podemos mejorar sin penalizar uno de los agentes: es lo que se llama un equilibrio de Pareto. Mi objetivo es de introducir a los herramientas de bases de este área de investigación, y algunos resultados recientes:

- El estudio de una dinámica continua que converge hasta un equilibrio de Pareto.
- Una pequeña revisión de resultados sobre los métodos numéricos utilizados para resolver este tipo de problemas.

## References

- [1] H. Attouch, G. Garrigos, X. Goudou: *A dynamic gradient approach to Pareto optimization with nonsmooth convex objective functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 422 (1), 741–771, 2015.

# Characterizations of the subdifferential of convex integrals

*Abderrahim Hantoute*

## Abstract

We provide new characterizations for the subdifferential of convex integrals whose normal integrand are defined in locally convex Suslin spaces. This setting is very convenient since it includes, from one hand, the most important settings for many applications, and, on the other hand, allows the use of the machinery of integration of vector-valued functions and multi-functions. These characterizations are given by means of the approximate subdifferential of the involved functions, and do not require any qualification conditions. If some of these qualification conditions are in force, then we recover some known results like those of [1,2,3].

## References

- [1] A. D. Ioffe, V. L. L. Levin: *Subdifferentials of convex functions*, Trudy Moskov. Mat. Obs, 26, 3–73 , 1972.
- [2] A. D. Ioffe: *Three theorems on subdifferentiation of convex integral functionals*, Journal of Convex Analysis, 13 (3-4), 759–772, 2006.
- [3] O. Lopez, L. Thibault: *Sequential formula for subdifferential of integral sum of convex functions*, J. Nonlinear Convex Anal. 9 no. 2, 295–308, 2008.

# On the graphical derivative of solution maps to parameterized equilibria with conic constraints

*Héctor Ramírez*

## Abstract

In this talk we present new calculations of the graphical derivative for the solution map to parameterized generalized equations/KKT systems associated with conic constraints. We first compute new second-order generalized differential constructions based on the graphical derivative of the normal cone mapping appearing in the KKT system. These computations are derived provided the feasible set appearing in the KKT system is convex. They provide verifiable conditions for isolated calmness of the corresponding solution map. Then, the application of a “dilatation” technique permits to extend this computation to the nonconvex case. The latter requires, however, an additional condition of geometric nature imposed on the considered cone. This is related to the  $\sigma$ -term associated with projection onto this cone and has a local character. Under this condition our formula for the graphical derivative has the same form as the formula resulting in VI over polyhedral sets, and so, it can be viewed as its generalization to a class of nonpolyhedral cones. The main results obtained in this general conic programming setting are specified for and illustrated by the second-order cone programming.

## References

- [1] J. F. Bonnans and H. Ramírez C., *Perturbation analysis of second-order cone programming problems*. Math. Program., 104, 205–227, 2005.
- [2] B.S. Mordukhovich, J.V. Outrata, H. Ramírez C., *Second-order variational analysis in conic programming with applications to optimality and stability*. To appear in SIAM J. Optim.
- [3] B.S. Mordukhovich, J.V. Outrata, H. Ramírez C., *On the graphical derivative of solution maps to parameterized equilibria with conic constraints*. Submitted.
- [4] J.V. Outrata, H. Ramírez C., *On the Aubin property of perturbed second-order cone programs*. SIAM J. Optim., 21, 798–823, 2011.

---

Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Matemática & Centro de Modelamiento Matemático, hramirez@dim.uchile.cl.

El trabajo es financiado por el Proyecto FONDECYT 1110888 y por el proyecto BASAL Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile



# Strong convergent Tseng’s algorithm for solving monotone inclusions

*Luis M. Briceño Arias, P. L. Combettes*

## Abstract

The Tseng’s algorithm [1] allows us to solve the monotone inclusion

$$\text{find } x \in \mathcal{H} \quad 0 \in Ax + Bx, \quad (1)$$

where  $\mathcal{H}$  is a real Hilbert space,  $A: \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  is maximally monotone, and  $B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  is monotone and lipschitzian. A large number of applications in image processing, optimization, game theory, among others fit in this context. The algorithm provided by Tseng generates a sequence converging weakly to a solution to (1) and strong convergence is guaranteed only under additional assumptions, e.g., strong monotonicity, on  $A$  or  $B$ . In this talk we provide a strongly convergent version of Tseng’s method without additional assumptions. Inspired from the work of Haugauzaeau [2], we include additional projections to appropriate half spaces which guarantees the strong convergence of the iterates to the projection of the initial point onto the solution set. Some applications are examined.

## References

- [1] P. Tseng: *A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings*, SIAM J. Control Optim. 38, 431–446 (2000)
- [2] Y. Haugazeau, *Sur les Inéquations Variationnelles et la Minimisation de Fonctionnelles Convexes*, Thèse, Université de Paris, Paris, France, 1968

# Optimal rates of convergence for averaged fixed-point iterations

*Mario Bravo, Roberto Cominetti*

## Abstract

We study the well-known averaged iteration to compute fixed points of nonexpansive maps. We prove the existence of a sequence of recursive bounds that are optimal in terms of the rate of convergence to the set of fixed points of the function. Moreover we construct an explicit nonexpansive map attaining the bounds. These two facts were conjectured by Baillon and Bruck [1]. Our proof relies on several methods, including the study of special functions, combinatorial techniques and recursive linear programming.

## References

- [1] J.B. Baillon, and R.E. Bruck: *Optimal rates of asymptotic regularity for averaged non-expansive maps*, In: Proceedings of the Second International Conference on Fixed Point Theory and Applications (K.K. Tan, ed.), World Scientific Press, London, 27-66, 1992.

# Multi-class Support Vector Machines with configuration center

*Miguel Carrasco, Julio López and Sebastián Maldonado*

## Abstract

Multi-class classification is an important pattern recognition task that can be addressed accurately and efficiently by Support Vector Machine (SVM). In this work we present a SVM-based Multi-class classification approach that uses the center of the configuration, a point which is equidistant to all classes. The Multi-class SVM model can be obtained by solving a particular convex quadratic minimization problem. We provide a geometric interpretation of this minimization program by computing the respective Wolfe Dual problem. The center of the configuration is obtained by minimizing the distances between the reduced convex hulls using the euclidean norm, while the decision functions are subsequently constructed from this point. Several extensions of this formulation are presented. For example, the use of  $\ell_1$ -Norm which provides a single linear programming formulation; or including chance constraints, which results in a Convex Cone constrained Mathematical Programming problem. Experiments on benchmark data sets are presented for the proposed alternatives.

---

M. Carrasco and S. Maldonado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Universidad de los Andes Monseñor Álvaro del Portillo 12455, Las Condes, Santiago, Chile.  
micarrasco@uandes.cl, smaldonado@uandes.cl

J. López, Facultad de Ingeniería, Universidad Diego Portales, Ejército 441, Santiago, Chile.  
julio.lopez@udp.cl

The first author was supported by FONDECYT project 1130905, the second was funded by FONDECYT project 11110188 and by CONICYT Anillo ACT1106, and third author was supported by FONDECYT project 11121196.

# On Hadamard well-posedness of families of multiobjective optimization problems

César Gutiérrez<sup>1</sup>, Rubén López<sup>2</sup>, Vicente Novo<sup>3</sup>

## Abstract

In this talk we study Hadamard well-posedness notions for families of multiobjective optimization problems. To do this, we employ the notion of variational convergence for vector-valued functions from [2, 3] and tools from asymptotic analysis [1].

## References

- [1] A. Auslender, M. Teboulle: *Asymptotic cones and functions in optimization and variational inequalities*, Springer, 2003.
- [2] R. López, C. Vera: *On the set of weakly efficient minimizers for convex multiobjective programming*, Oper. Res. Lett., 36, 651–655, 2008.
- [3] R. López: Variational convergence for vector valued-functions and its applications to convex multiobjective programming, *Math. Meth. Oper. Res.*, 159, 741–768, 2013.

---

<sup>1</sup>Universidad de Valladolid, cesargv@mat.uva.es

<sup>2</sup>Universidad Católica de la Sma. Concepción, rlopez@ucsc.cl

<sup>3</sup>Universidad Nacional de Educación a Distancia, vnov@ind.uned.es

# Real algebraic geometry and Hamiltonian dynamics

*Laurent Niederman*

## Abstract

We present the notion of steepness ([1], [2]) which is generic for a smooth enough function. This property is at the basis of important results of stability for Hamiltonian systems (so called Nekhoroshev theory) but remains mysterious (see [3])

## References

- [1] L. Niederman: *Nekhoroshev Theory*, Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, pp. 1070–1081, Springer, 2011.
- [2] L. Niederman: *Hamiltonian stability and subanalytic geometry*, Annales de l’Institut Fourier, 56(3), pp. 795-813, 2006.
- [3] A. Bounemoura, B. Fayad, L. Niederman: *Generic doubly-exponential stability of elliptic fixed points in Hamiltonian systems*, preprint, 2014.

# Probabilidad y Estadística

# Slope heuristics in heteroscedastic least-squares regression

*Adrien Saumard*

## Abstract

The slope heuristics is a quite recent method of penalty calibration in model selection. We will present the theoretical foundations of the slope heuristics and prove its validity in a heteroscedastic regression framework with random design.

The systematical study of model selection procedures, especially since the early nineties, has led to the design of penalties that often allow to achieve minimax rates of convergence and adaptivity for the selected model, in the general setting of risk minimization ([1], [2]).

However, the proposed penalties often suffer from their dependencies on unknown or unrealistic constants. As a matter of fact, under-penalization has generally disastrous effects in terms of efficiency. Indeed, the model selection procedure then loses any bias-variance trade-off and so, tends to select one of the biggest models in the collection.

Birgé and Massart ([3]) proposed quite recently a method that empirically adjusts the level of penalization in a linear Gaussian setting. This method of calibration is called "slope heuristics" by the authors, and is proved to be optimal in their setting. It is based on the existence of a minimal penalty, which is shown to be half the optimal one.

Arlot and Massart ([4]) have then extended the slope heuristics to the more general framework of empirical risk minimization. They succeeded in proving the optimality of the method in heteroscedastic least-squares regression, a case where the ideal penalty is no longer linear in the dimension of the models, not even a function of it. However, they restricted their analysis to histograms for technical reasons. They conjectured a wide range of applicability for the method.

We will present some results that prove the validity of the slope heuristics in heteroscedastic least-squares regression for more general linear models than histograms. The models considered here are equipped with a localized orthonormal basis, among other things. We show that some piecewise polynomials and Haar expansions satisfy the prescribed conditions.

We will insist on the analysis when the model is fixed. In particular, we will focus on deviations bounds for the true and empirical excess risks of the estimator. Empirical process theory and concentration inequalities are central tools here, and the results at a fixed model may be of independent interest.

## References

- [1] V. Koltchinskii: *Oracle inequalities in empirical risk minimization and sparse recovery problems*, volume 2033 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2011.
- [2] P. Massart: *Concentration inequalities and model selection*, volume 1896 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [3] L. Birgé, P. Massart: *Minimal penalties for Gaussian model selection*, Probab. Theory Related Fields,138(1-2):33–73, 2007.
- [4] S. Arlot, P. Massart: *Data-driven calibration of penalties for least-squares regression*, J. Mach. Learn. Res., 10:245–279 (electronic), 2009.



# Specification tests for instrumental variables models in the presence of heteroskedasticity and many instruments

*Federico Crudu, Giovanni Mellace, Zsolt Sándor*

## Abstract

This paper proposes two specification tests for instrumental variables models in the presence of heteroskedasticity. We study the limiting behaviour of the proposed statistics assuming that the number of instruments goes to infinity with the sample size. In the context of instrumental variables estimation and inference, the strength of the instruments plays a crucial role. In our framework we allow for instruments of arbitrary strength. The proposed test statistics are generalizations of the Anderson-Rubin statistic (Anderson and Rubin, 1949) and the Sargan statistic (Sargan, 1958). We show that our test statistics have a Gaussian limit. Moreover, we show via Monte Carlo experiments that the two tests perform well in finite samples.

## References

- [1] S. Anatolyev, N. Gospodinov: *Specification testing in models with many instruments*, *Econometric Theory*, 27, 427–441, 2011.
- [2] T. W. Anderson, H. Rubin: *Estimation of the parameters of a single equation in a complete system of stochastic equations*, *Annals of Mathematical Statistics*, 20, 46–63, 1949.
- [3] P. A. Bekker, F. Crudu: *Jackknife instrumental variables estimation with heteroskedasticity*, forthcoming *Journal of Econometrics*, 2014.
- [4] D. J. Sargan: *The estimation of economic relationships using instrumental variables*, *Econometrica*, 26, 393–415, 1958.

# Una aproximación a la mezcla jerárquica de krigings

*Freddy Omar López Quintero*

El análisis de conglomerados no es especialmente estudiado en el contexto de la estadística espacial con datos geoestadísticos (a diferencia de otro tipo de datos espaciales, como los procesos puntuales). La mayoría de las investigaciones que existen se clasifican en variantes para aglomerar datos espaciales contemplando únicamente la estructura de vecindad de los elementos y existen otras variantes que además intentan incorporar la estructura de covarianza de cada conglomerado [1].

En este trabajo se propone un método de conglomerados basado en una mezcla de modelos donde cada componente de la mezcla es un modelo lineal mixto derivado de un modelo de kriging tradicional

$$\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta} \sim \text{Normal}(\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{H}(\boldsymbol{\phi}) + \tau^2\mathbf{I})$$

que es considerado como un proceso gaussiano [2].

El modelo es presentado desde el punto de vista bayesiano, es implementado con el algoritmo de Metropolis-Hasting y es ejemplificado con un subconjunto de los datos suizos Jura [3].

## References

- [1] D. Allard, G. Guillot: *Clustering Geostatistical Data*, Proceedings of the sixth geostatistical conference, 2000.
- [2] J. Q. Shi, R. Murray-Smith, D.M. Titterington: *Hierarchical Gaussian process mixtures for regression*, Statistics and Computing, 15, 31–41, 2005.
- [3] P. Goovaerts: *Geostatistics for natural resources evaluations*, Oxford University Press, 1997.

# Collapse transition of a self-interacting partially directed random walk

*Gia Bao Nguyen*

## Abstract

We investigate the  $1 + 1$  dimensional self-interacting and partially directed self-avoiding walk, usually referred to by the acronym IPDSAW. The IPDSAW is known to undergo an extended-collapsed transition at a critical point  $\beta_c$ . We present here a new method that provides a probabilistic representation of the partition function, from which we derive a variational formula for the free energy. This variational formula allows us to prove the existence of the collapse transition and to identify the critical point in a simple way. We also provide the precise asymptotic of the free energy close to criticality and establish some path properties of the random walk inside the collapsed phase. This is a joint work with Nicolas Pétrélis and Philippe Carmona (University of Nantes, France).

## References

- [1] G. B. Nguyen, N. Pétrélis: *A variational formula for the free energy of the partially directed polymer collapse*, J. Stat. Phys. DOI: 10.1007/s10955-013-0748-2, (2013).
- [2] P. Carmona, G. B. Nguyen, N. Pétrélis: *Interacting partially directed self-avoiding walk: from phase transition to the geometry of the collapsed phase*, arXiv:1306.4887 [math.PR], (2014, submitted).

# Modelo ARCH y proceso de Poisson fraccionario

Héctor Araya<sup>1</sup>, Natalia Bahamonde<sup>2</sup>, Soledad Torres<sup>3</sup>

## Abstract

En el presente trabajo se presentan dos caracterizaciones del proceso de Poisson fraccionario (PPF), algunas propiedades, ventajas y desventajas de cada una de ellas. Se estudia una extensión del modelo ARCH relacionado con el cuadrado del PPF. Finalmente se construyen estimadores de mínimos cuadrados para los parámetros del modelo y se estudia su comportamiento asintótico. Mostrando un estudio de simulación.

## References

- [1] Arup. Bose, Kanchan. Mukherjee: *Estimating the ARCH parameters by solving linear equations*, Journal of Time Series Analysis, 24(2), 127–136, 2003.
- [2] Tim. Bollerslev: *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 31, 307–327, 1986.
- [3] Philippe. Bougerol, Nico. PicardTim: *Stationarity of Garch processes and of some non-negative time series*, Journal of Econometrics, 52(1-2), 115–127, 1992.
- [4] Xiao-Tian. Wang, Zhi-Xiong. Wen: *Poisson fractional processes*, Chaos, Solitons and Fractals, 18, 169–177, 2003.
- [5] Xiao-Tian. Wang, Zhi-Xiong. Wen, Shi-Ying. Zhang: *Poisson fractional processes (II)*, Chaos, Solitons and Fractals, 28, 143–147, 2006.

---

<sup>1</sup> Doctorado matemática UTFSM-UCV-UV, arayahector8@gmail.com.

<sup>2</sup> Instituto de Estadística. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, natalia.bahamonde@ucv.cl.

<sup>3</sup> CIMFAV, Facultad de Ingeniería, Universidad de Valparaíso, soledad.torres@uv.cl.

El trabajo es financiado por el Proyecto Fondecyt 1130586, Anillo ACT 1112.

# Stochastic control of branching diffusions : a finite horizon problem

*Julien Claisse*

## Abstract

In this talk, we are concerned with optimal stochastic control of branching diffusion processes. We start by introducing a nonstandard finite horizon problem in which the cost function is expressed as the product of individual costs penalizing the final position of each particle. Then we show that the value function solves (in the viscosity sense) a nonlinear parabolic PDE called the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. To this purpose, we investigate properties of branching diffusions and establish a dynamic programming principle.

# Absorbing State Phase Transitions

*Manuel Cabezas*

## Abstract

Consider an infinite system of particles in  $\mathbb{Z}^d$ . The particles can be either active ( $A$ ) or sleeping ( $S$ ). When the particles are active, they perform continuous-time, independent random walks, whereas, when they are sleeping, they stay put. Initially, all the particles are active but they fall asleep spontaneously at a certain sleeping rate  $\lambda > 0$  ( $A \mapsto S$ ). The interaction between the particles is the following: when an active particle jumps over an sleeping one, both particles become active ( $A + S \mapsto 2A$ ). This system, known as *Activated Random Walks* (ARW), displays an absorbing state phase transition in terms of the density of particles. More precisely, there is a critical density of particles  $\mu_c$  such that, if the density of the system is larger than  $\mu_c$ , there is an ongoing activity that never dies out, whereas, if the density is smaller than  $\mu_c$ , all particles eventually fall asleep forever. We will discuss theorems and conjectures about ARW. If time allows, we will also discuss the relation between absorbing state phase transitions and *Self Organized Criticality*.

# On Subsampling, Algebraic Confidence Covers and Asymptotics

*Milan Stehlík*

## Abstract

Hartigan's "typical value theorem" (1969) [3] is the basis for random subsampling, a resampling plan which uses group theory to construct confidence intervals for the center of a symmetric distribution on a real line. Atkins and Sherman [1] derived a group-theoretic condition on a set of subsamples of a random sample from a continuous random variable symmetric about 0 to be sufficient to provide typical values for 0.

Nowadays, in the "Big Data" era, subsampling from a complex data can be viewed as a natural solution to the computational issues induced by the immoderate size of databases. Since ignoring the survey scheme can impede estimation by introducing a non-negligible bias, it might be helpful to derive statistics under symmetry (or other group action) constrain. While a plethora of analyzes has already been conducted to provide unbiased and efficient estimation of average quantiles, to our knowledge, such is not the case for phenomenons involving invariance under the action of a finite reflection group, e.g. the hyperoctahedral groups of  $B_n$  type. We have addressed this issue in Francis, Stehlík and Wynn [2]. Beside that, surprisingly, generating functions for such structures (e.g.  $B_n$ ) follow asymptotics of Hájek-Šidák CLT (1967). Structures (e.g.  $B_n$ ) can naturally introduce invariances, under which statistician can build up covering nets in higher dimensions. Such knowledge provide us omnibus covering nets, which cannot be obtained by inverting of severely directed nonparametric multivariate rank tests (see recent paper Jurečková and Kalina [4]).

## References

- [1] J.E. Atkins, G.J. Sherman, *Sets of typical subsamples*, Statistics and Prob. Letters 14, 115-117, 1992.
- [2] A. Francis, M. Stehlík, H. Wynn: *Exact confidence nets based on finite reflection groups*, arXiv:1407.8375v2 [math.ST], 2014.
- [3] J.A. Hartigan (1969). *Using Subsample Values as Typical Values*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 64, No. 328, 1303-1317, 1969.
- [4] J. Jurečková, J. Kalina: *Nonparametric multivariate rank tests and their unbiasedness*, Bernoulli 18(1), 229-251, 2012.

# Aproximación de campos aleatorios en alta dimensión

*Nora Serdyukova*

## Abstract

Cuando la dimensión tiende a infinito, se trata de aproximar un campo aleatorio por el proceso de rango finito basado en la expansión Karhunen-Loève. Se estudia la dependencia de la complejidad de aproximación a la dimensión.

## References

- [1] Nora Serdyukova *Dependence on the dimension for complexity of approximation of random fields*, Theory Probab.Appl., 54-2, 272–284, 2010.



# Propagación de caos para la ecuación de Boltzmann

*Roberto Cortez, Joaquin Fontbona*

## Abstract

La ecuación de Boltzmann espacialmente homogénea modela la evolución temporal de la distribución de velocidades en  $\mathbb{R}^3$  de un gas compuesto por infinitas partículas sujetas a colisiones binarias. En este trabajo estudiamos el correspondiente sistema de interacción **finito** compuesto por  $N$  partículas sujetas a dichas colisiones, y encontramos una tasa explícita de orden  $N^{-1/3}$  para la convergencia de la medida empírica del sistema a la solución de la ecuación de Boltzmann. Este resultado extiende el trabajo de Fournier y Mischler [1] al caso de colisiones binarias **efectivas**.

## References

- [1] N. Fournier, S. Mischler: *Rate of convergence of the Nanbu particle system for hard potentials*. Preprint, <http://arxiv.org/abs/1302.5810>.

# Geometric Ergodicity of Gibbs Sampler for Bayesian General $t$ Linear Mixed Models

*Rolando de la Cruz<sup>\*,¶</sup>, Nathalie Humeniy<sup>\*</sup>, Jorge Carlos Román<sup>\*\*</sup>*

## Abstract

We consider a Bayesian version of a general  $t$  linear mixed model. We develop a block Gibbs sampler algorithm for estimating the posterior distribution in this model, and establish conditions that nearly always hold in practice, the block Gibbs Markov chain is geometrically ergodic.

---

<sup>\*</sup>Pontificia Universidad Católica de Chile, <sup>\*\*</sup>Vanderbilt University, <sup>¶</sup>rolando@med.puc.cl.

El trabajo es parcialmente financiado por el Proyecto FONDECYT 1120739, Programa Becas de Doctorado de CONICYT, y NSF Grant DMS-13-08765.

# Problemas Inversos y Control de EDP

# Null controllability of a cascade system of Schrödinger equations.

*Alberto Mercado Saucedo*

## Abstract

We present a control problem for a cascade system of two linear  $N$ -dimensional Schrödinger equations. The problem of null controllability by means of a control supported in a region not satisfying the classical geometrical control condition is addressed. The proof is based on the application of a Carleman estimate with degenerate weights to each one of the equations and a carefully analysis of the system in order to prove null controllability with only one control force.

This is a joint work with Marcos López-García and Luz de Teresa (IMATE, UNAM).

# Stability in transmission problems to Timoshenko beams with localized Kelvin-Voigt dissipation

*J., Muñoz-Rivera<sup>†</sup>, O., Vera<sup>‡</sup>, A., Rambaud<sup>‡</sup>*

## Abstract

We consider the transmission problem of Timoshenko's beam composed by three components: a Kelvin-Voigt viscoelastic (V) material, an elastic one (E), and another elastic material inserted with a frictional damping mechanism (F), as shown in Figure 1. We prove that the transmission problem is always wellposed. Our main result is that the stabilization of the beam depends on the position of each component. More precisely, we prove that the beam is exponential stable if and only if the viscoelastic component is not in the middle of the beam. Otherwise, the decay is only polynomial of order  $1/t^2$ . For the proofs, we use on the one hand standard arguments, due due to Prüss [3] and Huang [2] for the exponential decay, and due to Borichev and Tomilov [1], for the polynomial decay. On the other hand, we use a less classical argument of compact perturbation of the semigroup to prove the lack of exponential stability. We then naturally generalize the result for a beam composed of  $N$  parts, each of them being either elastic (E), or viscoelastic (V) or fictional (F) (see Figure 2).

---

<sup>†</sup> LNCC, Rio de Janeiro, Brasil, rivera@lncc.br

<sup>‡</sup> Universidad del Bío-Bío, Concepción, arambaud@ubiobio.cl

<sup>‡</sup> Universidad del Bío-Bío, Concepción, overa@ubiobio.cl

El trabajo es parcialmente financiado por el Proyecto Fondecyt 11130378.

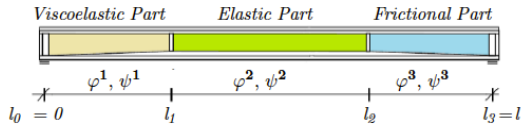


Figure 1: Three components beam

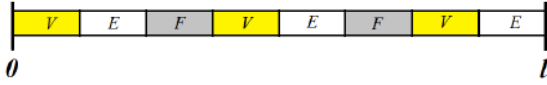


Figure 2: N components beam

## References

- [1] A. Borichev and Y. Tomilov. *Optimal polynomial decay of functions and operator semi-groups*. *Mathematische Annalen*. Vol. 347. 2(2009)455-478.
- [2] Huang Fa Lun. *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces*. *Annals of Differential Equations* Vol. 1. 1(1985)43-56.
- [3] J. Prüss. *On the spectrum of  $C_0$ -semigroups*. *Trans. AMS*. 284(1984)847-857.

# Almost automorphy and Riccati Equation

*Indira Mishra*

## Abstract

I will present some results in direction of optimal control theory. I first consider a linear time invariant systems with almost automorphic forcing term. I propose a new deterministic quadratic control problem, motivated by Da-Prato. With the help of associated degenerate Riccati equation we study the existence and uniqueness of an almost automorphic solutions of the associated differential equation.

Let  $Y$  and  $U$  be Hilbert spaces. We consider the following differential system:

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu + f \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

where  $A$  is the infinitesimal generator of an analytic  $C_0$ -semigroup  $(T(t))_{t \geq 0}$  on  $Y$ . Let  $B \in \mathcal{L}(U, Y)$ ,  $u \in L_{aa}^2(U)$  and  $f \in L_{aa}^2(Y)$ , where  $L_{aa}^2(Y)$  is the completion of  $AA(Y)$  with respect to the inner product

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt$$

defined on  $AA(Y)$ . Let us define the cost functional  $J(u)$  as follows:

$$J(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (|My|^2 + |u|^2) dt. \quad (2)$$

We can not always expect  $J(u)$  to be finite, so the optimization problem (1) with cost functional (2) is more general than the following optimal control problem.

Let us consider the following system.

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

and define the cost functional as

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty |My|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty |u|^2 \quad (4)$$

The linear regulator problem is to minimize  $J(u)$ , with the assumption (of finite cost condition) and  $(y, u)$  satisfy (3).

**Finite Cost Condition:** For every  $y_0 \in Y$ ,  $u \in L^2(0, \infty; U)$  such that  $J(u)$  defined in (4) is finite. and  $y$  satisfy (3). Then we know by [1] that there exists a bounded linear operator  $P = P^* \geq 0$  which satisfies the following operator algebraic Riccati equation:

$$A^*P + PA - PBB^*P + M^*M = 0.$$

Our aim is to minimize the average cost functional  $J(u)$ , over  $\mathcal{U}_{ad}$ .

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^2_{ap}(U) : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (|My|^2 + |u^2|) dt < \infty\}$$

where  $M \in \mathcal{L}(Y)$ . We can write (2) as

$$J(u) = |My|_{aa}^2 + |u|_{aa}^2$$

We obtain that the optimal control  $u$  for the system (1), minimizing the cost functional (2), which is given by the feedback law and also obtain the existence and uniqueness of an almost automorphic solutions for certain associated differential equations, including of the one, associated to the system (1). We are interested in making use of the solution  $P$  to the degenerate algebraic Riccati equation, that is there exists  $P = P^* \geq 0$  in  $\mathcal{L}(Y)$  such that

$$A^*P + PA - PBB^*P = 0. \tag{5}$$

Our results generalizes of the one result by Da Prato and Ichikawa [2], who have obtained the similar results for the case of almost periodicity.

## References

- [1] J. Zabczyk, *Mathematical Control; Theory – An Introduction*. Modern Birkhäuser Classics, 1992.
- [2] G. Da Prato and A. Ichikawa: *Optimal control of linear systems with almost periodic inputs*, *Siam J. Control and Optimization*, **25** (1987) 1007-1019.



# Aproximación numérica de los controles exactos en la ecuación del calor 2D

*Galina García<sup>A</sup>, Javier Ramírez<sup>B</sup>*

## Abstract

La aproximación numérica de los controles exactos a cero o controles a trayectorias en la ecuación del calor es conocido como un problema difícil. En este trabajo se presentan evidencias numéricas sobre el mal comportamiento de los controles de norma mínima  $L^2$  cerca del tiempo final  $T$ , cuando se implementa la controlabilidad exacta a cero en la ecuación del calor 2D. Además, se presentan experimentos numéricos de algunas soluciones presentadas en [1] para evitar el mal condicionamiento del problema.

## References

- [1] A. Munch, E. Zuazua: *Numerical approximation of the null controls for the heat equation: Ill-posed and remedies*, Inverse Problems, 26, 2010.

---

<sup>A</sup>Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile, galina.garcia@usach.cl

<sup>B</sup>Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile, javier.ramirezg@usach.cl

<sup>A</sup>Partially supported by Fondecyt Conicyt 1120560 project and CONICYT Anillo ACPA ACT1106 grants.

<sup>B</sup> Partially supported by Fondecyt Conicyt 1120560.

# Equilibrio de Nash para control multiobjetivo de un modelo de solidificación

*F.P. Marques-Lopes, M.A. Rojas-Medar*

## Abstract

En esta charla, trataremos el equilibrio de Nash para un problema de control con dos-objetivos gobernado por un sistema de ecuaciones parciales. Nuestro enfoque consiste en transformar el problema de control en un problema de optimización vectorial abstracto para, en seguida, probar las condiciones necesarias para un equilibrio de Nash.

## 1 Formulación del Problema

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  o  $3$ ,  $\omega_1, \omega_2$  dos regiones abiertas de  $\Omega$  con  $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ ,  $\omega_{1,d}$  y  $\omega_{2,d}$  dos subconjuntos abiertos de  $\Omega$  y consideremos los siguientes espacios:

$E_1 = W_{2s}^{2,1}(Q)$ ,  $E_2 = W_{2m}^{2,1}(Q)$ ,  $\mathcal{U}_r = L^{2s}(Q_r) = L^{2s}(\omega_r \times (0, T))$ ,  $E = E_1 \times E_2 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ ,  $\tilde{E} = L^{2s}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2s}(\Omega) \times L^{2m}(\Omega)$ .

Consideremos los funcionales  $J_r : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r = 1, 2$ , dados por

$$J_r(u, \phi, f_1, f_2) = \frac{\alpha_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} |u - u_{r,d}|^{2k} dxdt + \frac{\beta_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_{r,d}} |\phi - \phi_{r,d}|^{2m} dxdt + \frac{\mu_r}{2} \int_0^T \int_{\omega_r} |f_r|^{2s} dxdt. \quad (1)$$

donde  $\mu_r > 0$ ,  $\alpha_r \geq 0$ ,  $\beta_r \geq 0$ ,  $r = 1, 2$ , son constantes,  $u_{r,d}$  y  $\phi_{r,d}$  son funciones dadas en  $L^{2s}(Q_{r,d}) = L^{2s}(\omega_{r,d} \times (0, T))$ ,  $r = 1, 2$ , las funciones  $f_r$  son los controles tomados en  $\mathcal{U}_r$  y los estados  $(u, \phi)$  son soluciones de las ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_t u + l\partial_t \phi = \Delta u + f_1 \chi_{\omega_1} + f_2 \chi_{\omega_2}, & \text{en } Q; \\ \partial_t \phi = \Delta \phi + F(\phi) + u, & \text{en } Q; \\ u = u_0, \phi = \phi_0, & \text{en } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (2)$$

El problema de control que consideraremos es encontrar un par de controles  $(f_1, f_2)$  y variables  $(u, \phi)$  tales que los funcionales en (1) sean minimizados en el sentido de Nash sujetos a (2). Estos funcionales miden la diferencia, en una región  $\omega_{r,d}$ , entre el estado real  $(u, \phi)$  y un estado ideal dado  $(u_{r,d}, \phi_{r,d})$ , más un término que mide el costo del control  $f_r$ .

---

Universidade Federal do Pará (Brasil), Universidad del Bío-Bío (Chile), fpmlopes@ufpa.br, marko@ueubiobio.cl

M.A. Rojas-Medar was partially supported by Fondecyt Nro. 1120260, GI/C-UBB 121909 y MTM 2012-32325.

## References

- [1] Karl-Heinz Hoffmann, Li Shang Jiang, *Optimal control of a phase field model for solidification*. Numer. Funct. Anal. Optim. 13 (1-2), 11–27, (1992).
- [2] A.M. Ramos, R. Glowinski, J. Periaux, *Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations*. J. Optim. Theory Appl. 112 (3), 457–498, (2002).
- [3] I. Gayte, F. Guillén-González, M.A. Rojas-Medar, *Dubovitskii-Milyutin formalism applied to optimal control problems with constraints given by the heat equation with final data*. IMA J. Math. Control Inform. 27 (1), 57–76, (2010).
- [4] I. Gayte-Delgado, F. Guillán-González, F.P. Marques-Lopes, M.A. Rojas-Medar, *Optimal control and partial differential equations*. In Avances recientes en el análisis y control de ecuaciones diferenciales no lineales, 1, 124–141 (2004), Editores: J. L. Cruz, E. Fernández-Cara.
- [5] F. Guillán-González, F.P. Marques-Lopes, M.A. Rojas-Medar, *Nash and Pareto equilibria for the Navier-Stokes equations*, In preparation, 2014
- [6] F. Guillán-González, F.P. Marques-Lopes, M.A. Rojas-Medar, *Nash and Pareto equilibria of a phase field model for solidification*, In preparation, 2014.

# Image reconstruction using scattering in SPECT.

*Courdurier M.<sup>†</sup>, Monard F., Osses A., Romero F.*

## Abstract

In the medical imaging technique of Single-Photon Emission Computed Tomography (SPECT), the image of a source distributed inside the patient is obtained by measuring “ballistic” photons exiting the patient and assuming a known attenuation map. In this talk we will present an extended model for SPECT, based on which we attempt to reconstruct an image of the source and attenuation maps at the same time using measurements of “ballistic” and “scattered” photons. We will present the extended model, theoretical results on the injectivity of the linearized inverse problem and numerical experiments on synthetic and real data, which are encouraging about the feasibility of this approach.

---

<sup>†</sup> Pontificia Universidad Católica de Chile, [mcourdurier@mat.puc.cl](mailto:mcourdurier@mat.puc.cl)  
El trabajo es financiado parcialmente por el Proyecto Fondecyt número 1141189.

# Insensitizing controls with vanishing components for the Boussinesq system

*Nicolás Carreño*

## Abstract

We will present some results concerning the existence of insensitizing controls of the  $L^2$ -norm of the solution of the Boussinesq system with a reduced number of distributed scalar controls. It is well known that this problem can be formulated as a null controllability problem for a cascade system in which the controls are not present in all the equations. For this system, we will first show that the control on the fluid equation can be chosen to have up to two vanishing components. Then, we will see that it is also possible to remove the control on the temperature equation using the particular properties of the cascade system.

Let  $\Omega$  be a nonempty bounded connected open subset of  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  or  $3$ ) of class  $C^\infty$ . Let  $T > 0$  and let  $\omega \subset \Omega$  be a (small) nonempty open subset which is the *control set*. Let us also introduce another open set  $\mathcal{O} \subset \Omega$  which is called the *observatory* or *observation set*.

We introduce the following Boussinesq control system with incomplete data:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = f + v ds 1_\omega + \theta e_N, & \nabla \cdot y = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \theta_t - \Delta \theta + y \cdot \nabla \theta = f_0 + v_0 ds 1_\omega & & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ y = 0, \quad \theta = 0 & & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ y(0) = y^0 + \tau \widehat{y}_0, \quad \theta(0) = \theta^0 + \tau \widehat{\theta}_0 & & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

In this system,  $e_N$  is the  $N$ th canonical vector which stands for the gravity vector field,  $y = y(x, t)$  represents the velocity of the particules of the fluid,  $\theta = \theta(x, t)$  their temperature,  $(v_0, v) = (v_0, v_1, \dots, v_N)$  stands for the control which acts over the set  $\omega$ ,  $(f_0, f) = (f_0, f_1, \dots, f_N)$  is a given externally applied force and,  $\tau \widehat{y}_0$  and  $\tau \widehat{\theta}_0$  are small unknown perturbations of the initial state  $(y(0), \theta(0))$ .

We observe the solution of system (1) via some functional  $J_\tau(y, \theta)$ , which is called the *sentinel*. In this case, we take the sentinel to be the square of the local  $L^2$ -norm of the state variables:

$$J_\tau(y, \theta) := \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O} \times (0, T)} (|y|^2 + |\theta|^2) dx dt. \quad (2)$$

The insensitizing control problem is to find  $(v, v_0)$  such that the uncertainty in the initial data does not affect the measurement  $J_\tau$ , at least at the first order, i.e.,

$$\left. \frac{\partial J_\tau(y, \theta)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad \forall (\widehat{y}_0, \widehat{\theta}_0) \in L^2(\Omega)^{N+1} \text{ such that } \|\widehat{y}_0\|_{L^2(\Omega)^N} = \|\widehat{\theta}_0\|_{L^2(\Omega)} = 1. \quad (3)$$

Here, we are concerned with the existence of insensitizing controls for the Boussinesq system (1) having two vanishing components in the following way:

- **Case 1:**  $v_{i_0} \equiv 0$  for any given  $0 < i_0 < N$  and  $v_N \equiv 0$ ,
- **Case 2:**  $v_{i_0} \equiv 0$  for any given  $0 < i_0 < N$  and  $v_0 \equiv 0$ .

The particular form of the sentinel  $J_\tau$  allows us to reformulate the insensitizing problem (1)-(3) as a *null controllability problem* for a nonlinear cascade system. In particular, condition (3) is equivalent to  $(z(0), q(0)) = (0, 0)$  in  $\Omega$ , where  $(z, q)$ , together with  $(w, r)$ , solves the following coupled system:

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_t - \Delta w + (w \cdot \nabla)w + \nabla p_0 = f + v ds1_\omega + r e_N, & \nabla \cdot w = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ -z_t - \Delta z + (z \cdot \nabla^t)w - (w \cdot \nabla)z + q \nabla r + \nabla p_1 = w ds1_\mathcal{O}, & \nabla \cdot z = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ r_t - \Delta r + w \cdot \nabla r = f_0 + v_0 ds1_\omega & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ -q_t - \Delta q - w \cdot \nabla q = z_N + r ds1_\mathcal{O} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ w = z = 0, \quad r = q = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ w(0) = y^0, \quad z(T) = 0, \quad r(0) = \theta^0, \quad q(T) = 0 & \text{in } \Omega. \end{array} \right.$$

We prove this result following a standard approach. First, we deduce a null controllability result for the linearized system around the origin, provided that  $\omega \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$  and  $(y^0, \theta^0) = (0, 0)$  in  $\Omega$ . This is obtained thanks to an appropriate Carleman inequality for the adjoint system which is the main part of the proof. Then, we go back to the nonlinear problem using the controllability of the linear system and an inverse mapping theorem.

This is a joint work with Sergio Guerrero and Mamadou Gueye.

## References

- [1] N. Carreño: *Insensitizing controls for the Boussinesq system with no control on the temperature equation*, submitted.
- [2] N. Carreño, S. Guerrero, M. Gueye: *Insensitizing controls with two vanishing components for the three-dimensional Boussinesq system*, to appear in ESAIM Control Optim. Calc. Var..
- [3] N. Carreño, M. Gueye: *Insensitizing controls with one vanishing component for the Navier-Stokes system*, J. Math. Pures Appl., 101 no. 1, 27-53, 2014.

# On the control of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation

*Eduardo Cerpa, Patricio Guzmán and Alberto Mercado*

## Abstract

In this talk we discuss the null controllability property of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation by means of either boundary or internal controls. In the Dirichlet boundary case, we use the moment theory to prove that the null controllability property holds with only one boundary control if and only if the anti-diffusion parameter of the equation does not belong to a critical set of parameters. Regarding the Neumann boundary case, we prove that the null controllability property does not hold with only one boundary control. However, it does always hold when either two boundary controls or one internal control are considered. The proof of the latter is based on the controllability-observability duality and a suitable Carleman estimate.

## References

- [1] E. Cerpa: Null controllability and stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 9 (1), pp. 91–102, 2010.
- [2] H.O. Fattorini, D.L. Russel: Exact controllability theorems for linear parabolic equation in one space dimension, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 43 (4), pp. 272–292, 1971.
- [3] A.V. Fursikov, O.Yu. Imanuvilov: Controllability of Evolution Equations, in: *Lecture Notes Series*, Vol. 34, Seoul National University, Korea, 1996.
- [4] Y. Kuramoto, T. Tsuzuki: On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems: Reductive perturbation approach, *Prog. Theor. Phys.*, 54 (3), pp. 687–699, 1975.
- [5] G.I. Sivashinsky, Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames I: Derivation of basic equations, *Acta Astronaut.*, 4 (11-12), pp. 1177–1206, 1977.

---

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Casilla 110-V, Valparaíso, Chile, patricio.guzman@alumnos.usm.cl

This work has been partially supported by Fondecyt 1140741 (E. Cerpa, P. Guzmán), PIIC UTFSM 2014 (P. Guzmán), Fondecyt 1120610 (A. Mercado), Anillo ACT 1106 and CMM-Basal grants.

# Sistemas Dinámicos



# Minimal field of definition of a rational dynamic

*Rubén A. Hidalgo*

## Abstract

Each rational map  $R(z) \in \mathbb{C}(z)$  has associated an algebraic invariant under conjugation called the field of moduli;  $\mathcal{M}_R$ . This field may be seen as the intersection of all fields of definition of  $R(z)$ . This invariant should provide some information of the dynamics (from the arithmetic point of view) given by iteration of  $R(z)$ .

If the degree  $d$  of  $R(z)$  is at most 1, then it is not hard to see that  $\mathcal{M}_R$  is a field of definition of  $R(z)$ .

In the case that  $d \geq 2$ , J. H. Silverman has proved that  $\mathcal{M}_R$  is a field of definition if either  $d$  is even or  $R(z)$  is conjugated to a polynomial [4]. He also provides examples of rational maps of odd degree  $d \geq 3$  which cannot be defined over their field of moduli. These examples are in fact defined over a degree two extension of the field of moduli. The author has proved that this phenomena always holds, that is,

**Theorem [1].** *Every rational map can be defined over a degree two extension of its field of moduli.*

In this talk I will recall the definition of the field of moduli and describe some results obtained in this subject. In particular, I will describe the property for a rational map to have odd signature.

**Theorem [2].** *Every rational map of odd signature can be defined over its field of moduli.*

Rational maps of even degree and those conjugated to polynomials are examples of rational maps of odd signature. In particular, Silverman's results are a consequence of the previous.

**Corollary [4].** Every rational map of even degree or conjugated to a polynomial can be defined over its field of moduli.

We should mention that there are plenty of odd degree rational maps of odd signature. If time permits, I will also discuss the case of König's rational maps.

## References

- [1] R. A. Hidalgo: *A simple remark on the field of moduli of rational maps*, Quarterly Journal of Math. **65**, 627–635, 2014.
- [2] R. A. Hidalgo: *On the minimal field of definition of rational maps: with an application to König's rational maps*, in preparation.
- [3] R. A. Hidalgo: *Field of moduli of rational forms*, in preparation.
- [4] J. H. Silverman: *The field of definition for dynamical systems on  $\mathbb{P}^1$* , Compositio Mathematica, **98**, 269–304, 1995.

# Fractal and extreme aspects of random dynamical systems

*Milan Stehlík*

## Abstract

Extracting chaotical ([2]) and stochastic parts of information from time series needs very specific techniques. Motivated by two applications —image processing for cancer discrimination (see [7]) and methane emissions modelling (see e.g. [3, 4, 5])—, we will explain the necessary techniques for statistical learning on chaotical and stochastic parts from data. In particular, Tsallis Entropy will be introduced and its role in information theory for dynamical system explained. Iterated function systems will be used as an example for chaos re-simulation (see e.g.[6]). In particular, a construction of stochastic fractals will be discussed.

## References

- [1] T. M. Addiscott: *Entropy, non-linearity and hierarchy in ecosystems*, Geoderma, **160**, 57–63, 2010.
- [2] M. P. Holland, R. Vitolo, P. Rabassa, A. E. Sterk, H. Broer: *Extreme value laws in dynamical systems under physical observables*, arXiv:1107.5673v1, 28 July 2011.
- [3] P. Jordanova, J. Dušek, M. Stehlík: *Modeling methane emission by the infinite moving average process*. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, **64**, 40–49, 2013.
- [4] P. Jordanova, J. Dušek, M. Stehlík: *Microergodicity effects on ebullition of methane modelled by Mixed Poisson process with Pareto mixing variable*. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, **128**, 124–134, 2013.
- [5] R. Sabolová, V. Sečkárová, J. Dušek, M. Stehlík: *Entropy based statistical inference for methane emissions released from wetland*, submitted to Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 2014.
- [6] Ö. Stenflo: *Iterated function systems with a given continuous stationary distribution*, Fractals, **20**, 197–202, 2012.
- [7] M. Stehlík, S. Giebel, J. Prostakova, J.P. Schenk: *Statistical inference on fractals for cancer risk assessment*, Pakistan Journal of Statistic, **30**, 439–454, 2014.

# Exponentes de Lyapunov para familias de cociclos lineales rotados

*Francisco Valenzuela H. and Carlos H. Vásquez*

## Abstract

Sea  $(X, A, \mu)$  un espacio de probabilidad,  $T : X \rightarrow X$  un homeomorfismo ergódico para  $\mu$  y sea  $A : X \rightarrow \mathbb{GL}^+(2, \mathbb{R})$  una función continua. En este trabajo, estudiamos el exponente de Lyapunov superior  $\lambda^+(\theta)$  asociado al cociclo lineal  $\mathbf{A}_\theta : X \times \mathbb{R}^2 \rightarrow X \times \mathbb{R}^2$  definido por

$$\mathbf{A}_\theta(x, v) = (Tx, A(x)R_\theta v)$$

donde  $R_\theta$  es la rotación en ángulo  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

Mostramos que si el cociclo  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$  tiene descomposición dominada, entonces existe un subconjunto abierto no vacío  $\mathcal{U}$  de parámetros  $\theta$  con  $0 \in \overline{\mathcal{U}}$ , tal que el cociclo  $\mathbf{A}_\theta$  tiene descomposición dominada y la función  $\mathcal{U} \ni \theta \mapsto \lambda^+(\theta)$  es real analítica y cóncava. Como consecuencia, obtenemos que el conjunto de parámetros  $\theta$  donde el cociclo  $\mathbf{A}_\theta$  no tiene descomposición dominada es no vacío.

## References

- [1] F. Valenzuela, C. Vásquez: *Lyapunov exponent for families of rotated linear cocycles*, Preprint.

---

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, francisco.valenzuela@ucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, carlos.vasquez@ucv.cl

F.V. fue parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt 3120193, C.V. fue financiado por Center of Dynamical Systems and Related Fields código ACT1103 PIA - Fondecyt 1130547

# Kan's phenomena is not usual in three dimensional partially hyperbolic diffeomorphisms

Raúl Ures and Carlos H. Vásquez

## Abstract

It is well-known that it is possible to construct a partially hyperbolic diffeomorphism on the 3-torus like Kan example. It has two hyperbolic physical measures with intermingled basins on two embedded tori with Anosov dynamics. A natural question is how robust are the intermingled basin phenomena for diffeomorphisms defined on boundaryless manifolds? In this work we will show that in the 3-torus the only partially hyperbolic examples having hyperbolic physical measures with intermingled basins are not robust.

Away from the uniform hyperbolicity, there exist an open set of diffeomorphisms of manifolds with boundary onto themselves which may have attractors with intermingled basins [1].

The existence of examples of such nature rises the question of how robust are the intermingled basin phenomena for diffeomorphisms defined on boundaryless manifolds? In this work we will show that in the 3-torus the only partially hyperbolic examples having hyperbolic physical measures with intermingled basins are not robust.

We put our focus in  $M = \mathbb{T}^3$ . A diffeomorphism  $f : M \rightarrow M$  is *partially hyperbolic* if the tangent bundle splits into three non trivial subbundles

$$TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s.$$

Here, the center subbundle  $E^c$  may contract or expand slightly, but it is dominated by the strong expansion and contraction of the unstable and stable subbundles. It is known that the subbundles  $E^u$ ,  $E^c$ , and  $E^s$  are Hölder continuous and that there are unique Hölder continuous foliations  $W^{uu}$  and  $W^{ss}$  tangent to  $E^u$  and  $E^s$  respectively. In general,  $E^c$ ,  $E^{cu} = E^c \oplus E^u$ , and  $E^{cs} = E^c \oplus E^s$  do not integrate to foliations, but when they are uniquely integrable, the system is said to be *dynamically coherent*. Brin, Burago, and Ivanov have shown that every absolute partially hyperbolic system on the 3-torus is dynamically coherent.

---

Carlos H. Vásquez, Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Blanco Viel 596, Cerro Barón, Valparaíso-Chile, carlos.vasquez@ucv.cl

Trabajo parcialmente financiado por el Proyecto Center of Dynamical Systems and Related Fields código ACT1103 PIA - Conicyt y Proyecto Fondecyt 1130547.

An  $f$ -invariant probability measure  $\mu$  is *physical* if its basin

$$\mathcal{B}(\mu) = \left\{ z \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(z)) = \int_M \varphi d\mu, \text{ for all } \varphi \in C^0(M, \mathbb{R}) \right\}$$

has positive Lebesgue measure on  $M$ . A physical measure is said to be *hyperbolic* if all its Lyapunov exponents are non zero. In the setting of partially hyperbolic diffeomorphisms defined on a 3-dimensional manifold, a physical measure is hyperbolic if

$$\lambda^c(\mu) = \int \log \|Df|E^c\| d\mu \neq 0.$$

A set  $K \subseteq M$  is *u-saturated* if it is the union of complete unstable leaves. The diffeomorphism  $f$  is *accessible* if every pair of points  $x, y \in M$  can be joined by an arc consisting of finitely many segments contained in the leaves of the strong stable and strong unstable foliations. Assuming that the central bundle is one-dimensional and integrable, V. Niţica and A. Török proved that the accessibility property is open and dense among the  $C^r$ -partially hyperbolic diffeomorphisms.

**Theorem 1** *Let  $f \in \text{Diff}^r(\mathbb{T}^3)$ ,  $r \geq 2$ , be partially hyperbolic, dynamically coherent with compact center leaves. Let  $\mu$  be a hyperbolic physical measure for  $f$ . Assume that  $K \subseteq \mathbb{T}^3$  is a compact,  $f$ -invariant and  $u$ -saturated subset such that  $K \subseteq \overline{\mathcal{B}(\mu)} \setminus \text{supp } \mu$ . Then,  $K$  is the finite union of (periodic or invariant) 2-dimensional  $C^1$ -tori, tangent to  $E^u \oplus E^s$ . In particular  $f$  is not accessible.*

We say that two physical measures  $\mu$  and  $\nu$  have *intermingled basins* [1] if for every open set  $A \subseteq M$  we have

$$\text{Leb}(A \cap \mathcal{B}(\mu)) > 0 \quad \text{and} \quad \text{Leb}(A \cap \mathcal{B}(\nu)) > 0.$$

**Corollary 2** *The set of  $C^r$ -diffeomorphisms partially hyperbolic and dynamically coherent defined on  $\mathbb{T}^3$ ,  $r \geq 2$ , which exhibit intermingled hyperbolic physical measures has empty interior. Moreover, if  $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  is isotopic with Anosov, then there exist no intermingled hyperbolic physical measures.*

Closely related, Hammerlind and Portie shown that partially hyperbolic diffeomorphisms on 3-nilmanifold admit a unique  $u$ -saturated minimal subset. Then  $f$  has a unique hyperbolic physical measure and thus, it is not possible to have the intermingled phenomena and we have as corollary:

**Corollary 3** *If  $M$  is a 3-nilmanifold, then there exist no intermingled hyperbolic physical measures.*

## References

- [1] I. Kan: *Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin.* Bulletin of the American Mathematical Society, **31**, 68–74, 1994.

# Prevalence of Ergodic optimization on shift spaces

*Jairo Bochi and Yiwei Zhang*

## Abstract

Ergodic optimization is the process of finding invariant probability measures that maximizes the integrals of a given function. It has been conjectured that for expanding systems, “most” functions are uniquely optimized by the measures supported on a periodic orbit. When considering “most” in the topologically generic sense, several functional spaces have been proved containing an open and dense subset of functions which are optimized by measures supported on a periodic orbit.

For comparison, we give a first positive result for the conjecture for the full 2-shift, while considering “most” in the prevalence sense. The concept of prevalence was introduced by Hunt and Kaloshin, Ott and Yorke and is a measure-theoretic notion for subsets of infinite-dimensional spaces that is analogous to “full Lebesgue measure” in Euclidean spaces. To be more precise, we construct certain Hilbert cube with sufficiently fast shrinkage speed on edges, and show that that Lebesgue almost surely functions in the Hilbert cube are uniquely and robustly optimized by the measures supported on a periodic orbit.

# Teoría de Matrices y Teoría Espectral de Grafos



# Nonnegative Bisymmetric Matrices with prescribed spectrum

*Ana I. Julio, Ricardo Soto*

## Abstract

Given a list  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  of real numbers, we give sufficient conditions for the existence and construction of a nonnegative bisymmetric matrix with prescribed spectrum. In particular, if the list  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  is such that  $\lambda_1 > 0$  and  $\lambda_i < 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , then the bisymmetric nonnegative inverse eigenvalue problem has always a solution.

## References

- [1] A. Cantoni, P. Bluter: *Eigenvalues and eigenvectors of symmetric centrosymmetric matrices*, Linear Algebra Appl, 13, 275–288, 1976.
- [2] R. Soto, O. Rojo, J. Moro, A. Borobia: *Symmetric nonnegative realization of spectra*, , Electronic Journal of Linear Algebra, 16, 1–18, 2007.

# Polar Matrix of a Graph

*Eduardo Montenegro V., Eduardo Cabrera A.*

## Abstract

A simple finite graph can be expressed algebraically by an adjacency matrix. The study of a graph through this array is part of the spectral graph theory. The spectrum of a finite graph  $G$ , is determined by its distinct eigenvalues with their multiplicities. A graph is not necessarily determined by its spectrum, that is, there are various graphs with the same spectrum. In our work we introduce some modifications to the idea of adjacency matrix of a graph by introducing the idea of *polar matrix* of a graph. If  $\Omega$  denote the class of all simple graphs and finite, then - in order to construct the polar matrix of a graph - performing use of a graph  $G$  by a sphere of  $\mathbb{R}^n, n \geq 4$ , perforated at one of its poles. That realization will be denoted by  $G^*$  and call it polar realization. Then we will prove that each polar realization of a graph  $G$  admits a structure of real vector space.

The main objective of this work is to determine the decomposition into direct sum of own spaces on the polar matrix of a given finite graph  $G$  and analyze each state matrix polar orbit  $\{w^k(G)\}$  where  $w: \Omega \rightarrow \Omega$  is a contractive application. In a first stage complete graphs and use, in a second stage, complete bipartite graphs.

## References

- [1] M, Barnsley, *Fractal Everywhere*, Academic Press, 1988.
- [2] A. Brøndsted, *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer Verlag, 1983.
- [3] G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software Pacific Grove, C.A., 1996.
- [4] G. Chartrand & O. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill, Inc., 1993.
- [5] H. Coxeter, *Regular Polytopes*, Third Edition, Dover Publication, Inc, 1973.
- [6] R. Devaney, *Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edition, AddisonWesley, 1989.

---

Universidad de Playa Ancha, emontene@upla.cl

Work financed by Dirección General de Investigación of the Universidad de Playa Ancha through Project CNEI01-1314 "UN MODELO DE PENSAMIENTO EN SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS"

- [7] R. Holmgren, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1994.
- [8] A. Kolmogorov & S.V.Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, INC., New York, 1975.
- [9] E. Montenegro, R. Salazar, *A result about the incidents edges in the graphs  $M_k$* , Discrete Mathematics, 122, 277-280, 1993.
- [10] E. Montenegro, D. Powers, S. Ruiz, R. Salazar, *Spectra of related graphs and Self Reproducing Polyhedra*, Proyecciones, v 11, N. 1, 01- 09, 1992.
- [11] E. Montenegro, E. Cabrera, *Attractors Points in the Autosubstitution*, Proyecciones, v 20, N. 2, 193 - 204, 2001.
- [12] E. Prisner, *Graph Dynamics*, version 213, Universitat Hamburg, 1994.
- [13] R. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

# Una familia de matrices no negativas con espectro y divisores elementales prescritos

*Elvis R. Valero Kari, Ricardo L. Soto*

## Abstract

Un resultado de perturbación, debido a Rado, muestra cómo modificar  $r$  valores propios de una matriz de orden  $n$  a través de una perturbación de rango  $r \leq n$ , sin cambiar ninguno de los  $n - r$  valores propios restantes. Este resultado extiende un Teorema anterior, debido a Brauer, sobre perturbaciones de rango  $r = 1$ . Ambos resultados se han explotado en relación con el problema inverso de autovalores para matrices no negativas.

En este trabajo, utilizamos el resultado de Rado desde un punto de vista más general, para la construcción de una familia de matrices no negativas con espectro y divisores elementales prescritos, y generalizar así los resultados anteriores.

## References

- [1] A. BRAUER, *Limits for the characteristic roots of a matrix IV: Applications to stochastic matrices*, Duke Math. J. 19 (1952) 75-91.
- [2] H. PERFECT, *Methods of constructing certain stochastic matrices*, 20 (1953) 395-404.
- [3] W. GUO, *Methods of constructing certain stochastic matrices II*, Duke Math. J. 22 (1955) 305-311.
- [4] R. L. SOTO, *Existence and construction of nonnegative matrices with prescribed spectrum*, Linear Algebra Appl. 369 (2003) 169-184.
- [5] R. L. SOTO, J. CCAPA, *Nonnegative matrices with prescribed elementary divisors*, Electron. J. Linear Algebra 17 (2008) 287-303.
- [6] R. L. SOTO, O. ROJO, *Applications of a Brauer theorem in the nonnegative inverse eigenvalue problem*, Linear Algebra Appl. 416 (2006) 844-856.

---

Universidad Católica del Norte, evalero@ucn.cl

El trabajo es parcialmente financiado por el Proyecto Fondecyt 1120180.

El trabajo es parcialmente financiado por el Proyecto Conicyt Res 2093.

# Relation between the energy of the line graph of $G$ and the signless Laplacian energy of $G$ .

*Luis Medina C.*

## Abstract

Let  $G$  be a simple undirected graph.

The energy of a graph  $G$  is the sum of the absolute values of the eigenvalues of the adjacency matrix of  $G$ . The signless Laplacian energy of  $G$  is the sum of the absolute values of the differences between the eigenvalues of the signless Laplacian matrix and the arithmetic mean of the vertex degrees of the graph.

In this work, we establish relations between the energy of the line graph of  $G$  and the energy associated with the signless Laplacian matrix of  $G$ .

## References

- [1] I. Gutman, *The energy of a graph*, Ber. Math.-Statist. Sect. Forschungsz. Graz 103: 1522; 1978.
- [2] I. Gutman, D. Kiani, M. Mirzakhah, *On incidence energy of graphs*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 62: 573-580; 2009.
- [3] I. Gutman, D. Kiani, M. Mirzakhah, B. Zhou, *On incidence energy of a graph*, Lin. Algebra Appl. 431: 1223-1233; 2009.
- [4] I. Gutman, M. Robbiano, E. Martins, D. Cardoso, L. Medina, O. Rojo. *Energy of line graphs*, Linear Algebra and its Applications 433: 1312-1323; 2010.

## An application of $M$ -matrices

Mario Salas García

### Abstract

In [1], the authors study the optimal power control problem in wireless communications. The solution of this problem requires to solve the inequality  $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ , where  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  is a  $Z$ -matrix (that is,  $a_{ij} \leq 0$  for  $i \neq j$ ) and  $\mathbf{b}$  is a positive vector. The inequality  $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$  has a positive solution if and only if  $\mathbf{A}$  is an  $M$ -matrix [1]. Then the authors in [1] consider the following problem: Given an  $M$ -matrix  $\mathbf{A}$  and nonnegative vectors  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , find conditions under which  $\mathbf{A} - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$  is also an  $M$ -matrix. For this problem they give conditions in terms of  $\mathbf{A}^{-1}$  and of the vectors  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ . In particular for the case  $k = 1$ , they prove that  $\mathbf{A} - \mathbf{u} \mathbf{v}^T$  is an  $M$ -matrix if and only if  $\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} < 1$ . Here we study the matrix  $\mathbf{A} - \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$  from a different approach and we find sufficient conditions, which we think are more easy to handle.

## References

- [1] J. Ding, W. Pye, L. Zhao, Some results on structured  $M$ -matrices with an application to wireless communications, *Linear Algebra Appl.* 416 (2006) 608-614.
- [2] A. Berman, R. Plemmons, Nonnegative matrices in the Mathematical Sciences, SIAM Classics in Applied Math., Philadelphia, (1994).
- [3] R.L. Soto, O. Rojo, Applications of a Brauer Theorem in the nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.* 416 (2006) 844-856.
- [4] R. L. Soto, J. Ccapa. Nonnegative matrices with prescribed elementary divisors. *Electron. J. Linear Algebra* 17 (2008) 287-303.
- [5] R.L. Soto, R.C. Díaz, H. Nina, M. Salas, Nonnegative matrices with prescribed spectrum and elementary divisors, *Linear Algebra Appl.* 439 (2013) 3591-3604.

# Effect on the Laplacian Estrada Index by adding edges on pendent vertices

*Oscar Rojo*

## Abstract

Let  $G$  be a simple undirected graph on  $n$  vertices. The Laplacian matrix of  $G$  is the  $n \times n$  matrix  $L(G) = D(G) - A(G)$  where  $A(G)$  is the adjacency matrix of  $G$  and  $D(G)$  is the diagonal matrix of vertex degrees. It is well known that  $L(G)$  is a positive semidefinite matrix and that 0 is an eigenvalue of  $L(G)$  with eigenvector the all ones vector. The eigenvalues of  $L(G)$  are called the Laplacian eigenvalues of  $G$ . Fiedler [1] proved that  $G$  is a connected graph if and only if the second smallest eigenvalue Laplacian of  $G$  is positive.

If  $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G) = 0$  are the Laplacian eigenvalues of  $G$ ,  $LEE(G) = \sum_{i=1}^n \exp(\mu_i(G))$  is called the Laplacian Estrada Index of  $G$ .

Let  $H$  be an arbitrary graph of order  $s$  with Laplacian eigenvalues  $\mu_1(H) \geq \mu_2(H) \geq \dots \geq \mu_{s-1}(H) \geq \mu_s(H) = 0$ . Let

$$P_H(\lambda) = \prod_{i=1}^{s-1} (\lambda - (1 + \mu_i(H))). \quad (1)$$

If  $G$  is a connected graph possessing a vertex  $v$  to which  $s > 1$  pendent vertices are attached, then  $G(H)$  denotes the graph obtained from  $G$  and  $H$  identifying the vertices of  $H$  with the pendent vertices attached to  $v$ . In [2], we prove that the characteristic polynomials of  $L(G(H))$  and  $L(G)$  admit the factorizations

$$\det(\lambda I - L(G(H))) = \lambda P_H(\lambda) R(\lambda) \quad (2)$$

and

$$\det(\lambda I - L(G)) = \lambda(\lambda - 1)^{s-1} R(\lambda) \quad (3)$$

where  $P_H(\lambda)$  is the polynomial in (1) and  $R(\lambda)$  is a polynomial of degree  $n - s$  such that  $R(0) \neq 0$ .

In this work, using (2) and (3), we prove the following results.

1.  $LEE(G(H)) - LEE(G) = \sum_{j=1}^s \exp(1 + \mu_j(H)) - s \exp(1)$ .

2. If  $G$  is a connected graph possessing vertices  $v_i, 1 \leq i \leq r$ , to which  $s_i > 1$  pendent vertices are attached, if  $H_i$  is an arbitrary graph of order  $s_i$  and  $G(H_1, \dots, H_r)$  is the graph obtained from  $G$  and the graphs  $H_1, \dots, H_r$  identifying the vertices of  $H_i$  with the  $s_i$  pendent vertices attached to the vertex  $v_i$ , then

$$LEE(G(H_1, \dots, H_r)) - LEE(G) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{s_i} \exp(1 + \mu_j(H_i)) - \exp(1) \sum_{i=1}^r s_i$$

where  $\mu_1(H_i) \geq \mu_2(H_i) \dots \geq \mu_{s_i}(H_i) = 0$  are the Laplacian eigenvalues of  $H_i$ .

Therefore the difference between the Laplace Estrada Indexes of  $G(H_1, \dots, H_r)$  and  $G$  does not depend on the edges connecting non-pendents of  $G$ .

## References

- [1] M. Fiedler, Algebraic connectivity of graphs, Czechoslovak Math. J., 23 (1973) 298-305.
- [2] G. Pastén, O. Rojo, Laplacian Spectrum, Laplacian-Energy-Like Invariant, and Kirchhoff Index of Graphs Constructed by Adding Edges on Pendent Vertices, accepted for publication in MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry.



# Nonnegative persymmetric matrices with prescribed elementary divisors

*Ricardo Soto Montero*

## Abstract

The *nonnegative inverse elementary divisors problem* is the problem of finding conditions for the existence of an  $n \times n$  entrywise nonnegative matrix  $A$  with prescribed elementary divisors. In this work, we consider the case in which the solution matrix  $A$  is required to be *nonnegative persymmetric*. Our results generate an algorithmic procedure to compute a structured solution matrix.

## References

- [1] A.I. Julio, R.L. Soto, *Persymmetric and bisymmetric nonnegative inverse eigenvalue problem*, Submitted, 2014.
- [2] H. Minc, *Inverse elementary divisor problem for nonnegative matrices*, Proceedings American Mathematical Society 83 (1981) 665-669.
- [3] H. Minc, *Inverse elementary divisor problem for doubly stochastic matrices*, Linear Multilinear Algebra 11 (1982) 121-131.
- [4] H. Perfect, *Methods of constructing certain stochastic matrices II*, Duke Math. J. 22 (1955) 305-311.
- [5] R.M. Reid, *Some eigenvalue properties of persymmetric matrices*, SIAM Review 39 (1997) 313-316.
- [6] R.L. Soto, O. Rojo, *Applications of a Brauer theorem in the nonnegative inverse eigenvalue problem*, Linear Algebra Appl. 416 (2006) 844-856.
- [7] R.L. Soto, J. Ccapa, *Nonnegative matrices with prescribed elementary divisors*, Electron. J. Linear Algebra 17 (2008) 287-303.
- [8] R.L. Soto, R.C. Díaz, H. Nina, M. Salas, *Nonnegative matrices with prescribed spectrum and elementary divisors*, Linear Algebra Appl. 439 (2013) 3591-3604.

# Nonnegative inverse elementary divisors problem in the left half plane

*Roberto C. Díaz M. , Ricardo L. Soto M.*

## Abstract

In this work we give a necessary and sufficient condition for the nonnegative inverse elementary divisors problem to have a solution, in the case of lists  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  satisfying  $Re\lambda_k < 0$ ,  $|\sqrt{3}Re\lambda_k| \geq |Im\lambda_k|$ ,  $k = 2, \dots, n$ . For the case  $Re\lambda_k < 0$ ,  $k = 2, \dots, n$ , a new sufficient condition is given.

## References

- [1] R. C. Díaz, R. L. Soto, Nonnegative inverse elementary divisors problem in the left half plane, Pre-print.
- [2] T. J. Laffey, H. Smigoc, Nonnegative realization of spectra having negative real parts, Linear Algebra Appl. 416 (2006) 148-159.
- [3] H. Šmigoc, The inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices, Linear, Algebra Appl. 393 (2004) 365-374.
- [4] R. L. Soto, R. C. Díaz, H. Nina, M. Salas, Nonnegative matrices with prescribed spectrum and elementary divisors, Linear Algebra Appl. 439 (2013) 3591-3604.

# A lower bound for the spectral radius and upper bound energy of starlike trees

*Rubí Arrizaga Zercovich*

## Abstract

A tree is a connected acyclic graph. A tree is said to be starlike if exactly one of its vertices has degree greater than two. Let  $\lambda_1$  be the largest eigenvalue of the adjacency matrix of the starlike tree. Lepovic and Gutman proposed in [1] that  $\sqrt{k}$  is the lower bound for  $\lambda_1$ .

Let  $S(n_1, n_2, \dots, n_k)$  be the starlike tree which has a vertex  $v$  of degree  $k \geq 3$  and which has the property  $S(n_1, n_2, \dots, n_k) - v = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \dots \cup P_{n_k}$ , where  $P_n$  denote the path on  $n$  vertices.

In the present work, we improve the bound of Lepovic and Gutman when  $n_2 > 1$ . Moreover, we obtain an upper bound for the energy of a Starlike.

Joint work with:

Luis Medina C<sup>1</sup>, e-mail: [luis.medina@uantof.cl](mailto:luis.medina@uantof.cl), Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad de Antofagasta, Antofagasta, Chile.

## References

- [1] M. Lepovic, I. Gutman: *Some spectral properties of starlike trees.*, Bulletin T.CXXII de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts, 99-105, 2001.

---

Universidad de Antofagasta, [rubi\\_arrizaga@hotmail.com](mailto:rubi_arrizaga@hotmail.com)

Partially supported by Prog. Magister en Cs. M. Matemática Aplicada and Escuela de Postgrados, Universidad de Antofagasta

<sup>1</sup>Partially supported by Prog. Magister en Cs. M. Matemática Aplicada and Escuela de Postgrados, Universidad de Antofagasta

Programa LXXXIII Encuentro Anual SOMACHI

		Colbún 120	Maule 300	Salón B 40	Neruda 40	Mistral 40	Salón A 40	Arrau 15
Jueves 4	13-15 hrs.	Almuerzo						
	15-16 hrs.	OPTIMIZACION		GEOMETRIA	PROBAB. Y ESTAD.	P. INV. CONT. EDP	FISICA MATEMATI.	
	16.05-17.05 hrs.	Plenaria: Milton Jara (Maule)						
	17-17.30 hrs.	Coffee Break						
	17.30-18-30 hrs.	BIOMATEMATICA	DIVULG. Y DIDACT.	OPTIMIZACION	EDP	TEORIA DE MATRI.	PROBAB. Y ESTAD.	ALG. y TEO. NUM
	18.30-20.00 hrs	BIOMATEMATICA	DIVULG. Y DIDACT.	OPTIMIZACION	EDP	TEORIA DE MATRI.	PROBAB. Y ESTAD.	ALG. y TEO. NUM
	20-22 hrs.	Cena						
Viernes 5	9-10 hrs.			GEOMETRIA		P. INV. CONT. EDP	FISICA MATEMATI.	ALG. y TEO. NUM
	10.05-11.05 hrs.	Plenaria: Rubén Hidalgo (Maule)						
	11- 11.30 hrs.	Coffee Break						
	11.30-13 hrs.	BIOMATEMATICA	DIVULG. Y DIDACT.	OPTIMIZACION	EDP	TEORIA DE MATRI.	FISICA MATEMATI.	SISTEMAS DINAM.
	13-15 hrs.	Almuerzo						
	15-16 hrs.	BIOMATEMATICA		GEOMETRIA		P. INV. CONT. EDP	PROBAB. Y ESTAD.	SISTEMAS DINAM.
	16.05-17.05 hrs.	Plenaria: Jairo Bochi (Maule)						
	17-17.30 hrs.	Coffee Break						
	17.30-18-30 hrs.	OPTIMIZACION	DIVULG. Y DIDACT.	GEOMETRIA	PROBAB. Y ESTAD.	P. INV. CONT. EDP	FISICA MATEMATI.	SISTEMAS DINAM.
	18.30-20 hrs	Asamblea Sociedad de Matemática de Chile (Maule)						
20-22 hrs.	Cena							
Sábado 6	9-10 hrs.	DIVULG. Y DIDACT.		GEOMETRIA	EDP		PROBAB. Y ESTAD.	
	10.05-11.05 hrs.	Plenaria: Andrés Navas (Maule)						
	11- 11.30 hrs.	Coffee Break						
	11.30-13 hrs.	BIOMATEMATICA	DIVULG. Y DIDACT.		EDP	TEORIA DE MATRI.	FISICA MATEMATI.	
	13-15 hrs.	Almuerzo						